

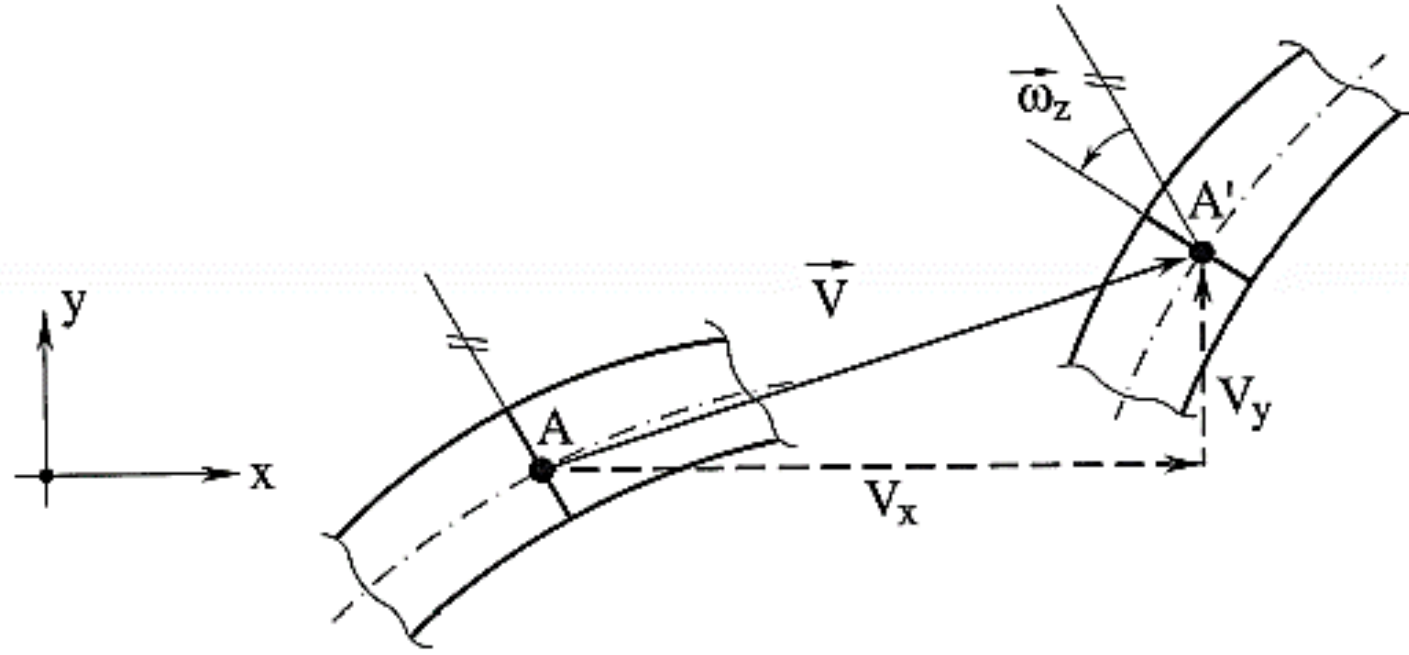
# YAPI STATİĞİ 1

DERS NOTLARI 9

Prof. Dr. Cengiz Dünder

## **BÖLÜM 9**

# İZOSTATİK SİSTEMLERDE ŞEKİL DEĞİŞTİRME VE YER DEĞİŞTİRMELERİN HESABI



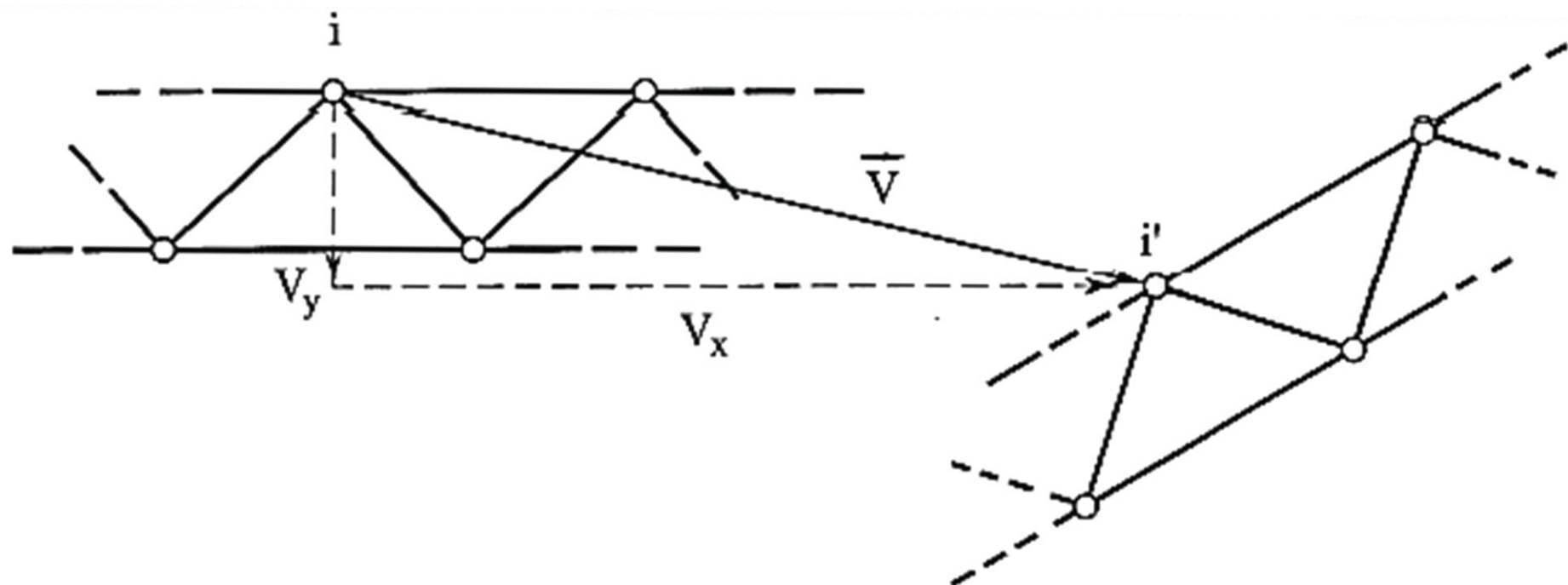
**Şekil 11:** Doğrusal ve açısal yerdeğiştirme vektörleri

Dış etkiler altında şekildeğiştiren bir düzlem çubuk sistemin bir  $A$  kesiti  $A'$  konumuna gelmektedir.  $A$  kesitinin yerdeğiştirmeleri,

$\vec{v}(v_x, v_y)$  : doğrusal yerdeğiştirme vektörü

ve

$\vec{w}_z(w_z)$  : açısal yerdeğiştirme vektörü olarak tanımlanır, Şekil 11.



**Şekil 11a:** Kafes sistemlerde doğrusal yerdeğiştirme vektörü

Düzlem kafes sistemlerde ise bir  $i$  düğüm noktasının yerdeğiştirmeleri  $\bar{v}(v_x, v_y)$  doğrusal yerdeğiştirme vektörüyle belirlenir, Şekil 11a.

Bir düzlem sistemde yerdeğiştirmelerin hesabının amacı,

a) Dolu gövdeli sistemlerde :  $v_x, v_y, w_z$

b) Kafes sistemlerde :  $v_x, v_y$

yerdeğiştirmelerinin (yerdeğiştirme bileşenlerinin) bulunmasıdır.

Yerdeğiştirmelerin hesabı,

a) sistemde dış etkilerden oluşan yerdeğiştirmelerin yönetmeliklerin öngördüğü sınır değerleri aşıp aşmadığını görmek için

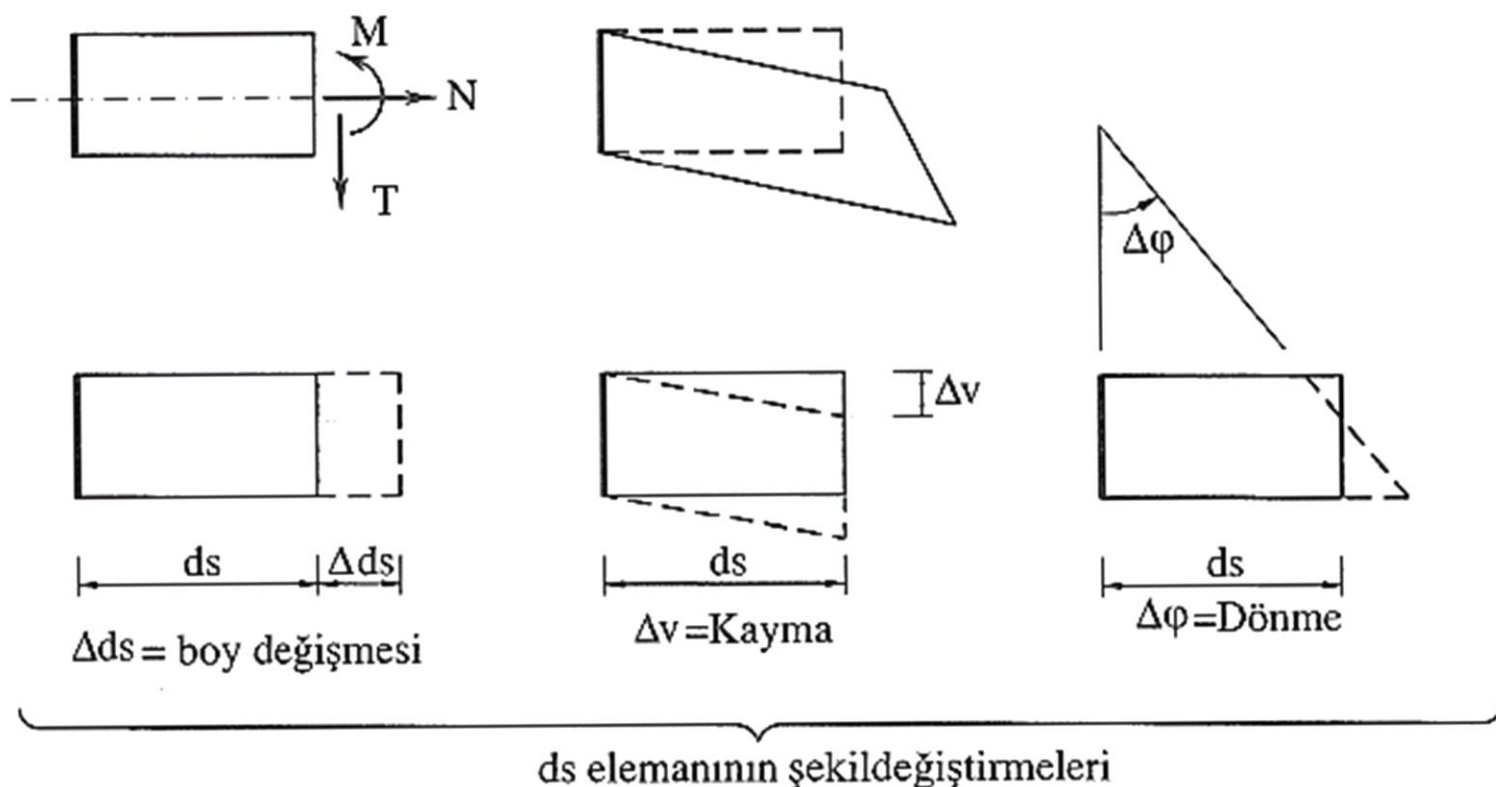
b) hiperstatik sistemlerin hesabı için gereklidir.

Sistemin yerdeğiştirmeleri sonsuz küçük çubuk elemanlarının  $\Delta\vec{v}, \Delta\vec{w}_z$  rölatif yerdeğiştirme (şekildeğiştirme) vektörlerinden oluşmaktadır. Bu nedenle ilk olarak şekildeğiştirmeler incelenecektir.

## 11.2 Çubuk Elemanın Şekildeğiştirmeleri

Bir kesitin diğer bir kesite göre  $\Delta\bar{v}$  ve  $\Delta\bar{w}_z$  rölatif yerdeğiştirmelerine çubuk elemanın şekildeğiştirmeleri denir.

$\Delta\bar{v}$ ,  $\Delta\bar{w}_z$  vektörlerinin kesit zorları üzerindeki izdüşümlerine şekildeğiştirme bileşenleri adı verilir. Düzlem çubuk sistemlerde bunlar üç tanedir.



Şekil 11b: Çubuk elemanın şekildeğiştirmeleri

Çubuk elemanınin şekildeğiştirme bileşenleri

$\Delta ds$  : boy değişmesi (uzama)

$\Delta v$  : kayma

$\Delta \varphi$  : dönme

şeklinde tanımlanır, Şekil 11b.

Şekildeğiştirme bileşenlerinin pozitif yönleri kesit zorlarının pozitif yönleri ile aynı yönde seçilmişlerdir.

Birim şekildeğiştirmeler, birim boydaki elemanda oluşan şekildeğiştirmelerdir.

$\frac{\Delta ds}{ds}$  : birim boy değişmesi (birim uzama)

$\frac{\Delta v}{ds}$  : birim kayma

$\frac{\Delta \varphi}{ds}$  : birim dönme (eğrilik)

### 11.3 Kesit Zorlarından Oluşan Şekildeğişirmeler

Mukavemetten bilindiği gibi lineer elastik malzemeden yapılmış sistemlerde kesit zorları ile birim şekildeğişirmeler arasındaki bağıntılar,

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} \quad , \quad \frac{\Delta v}{ds} = \frac{T}{GF'} \quad , \quad \frac{\Delta \phi}{ds} = \frac{M}{EI}$$

şeklinde yazılır.

Burada,

F : enkesit alanı (m<sup>2</sup>)

F' : enkesitin alanına ve kesit şekline bağlı bir büyüklük (m<sup>2</sup>)

F' = k × F

k =  $\frac{5}{6}$  dikdörtgen kesitte

k =  $\frac{27}{32}$  daire kesitte

I : enkesit atalet momenti (m<sup>4</sup>)

E : elastisite modülü (kN/m<sup>2</sup>)

Çelik için : E = 2 × 10<sup>6</sup> kg / cm<sup>2</sup> = 2 × 10<sup>8</sup> kN / m<sup>2</sup>

Beton için : E = 2 × 10<sup>5</sup> ~ 3 × 10<sup>5</sup>  $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$  = 2 × 10<sup>7</sup> ~ 3 × 10<sup>7</sup>  $\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

G : kayma modülü (kN/m<sup>2</sup>)

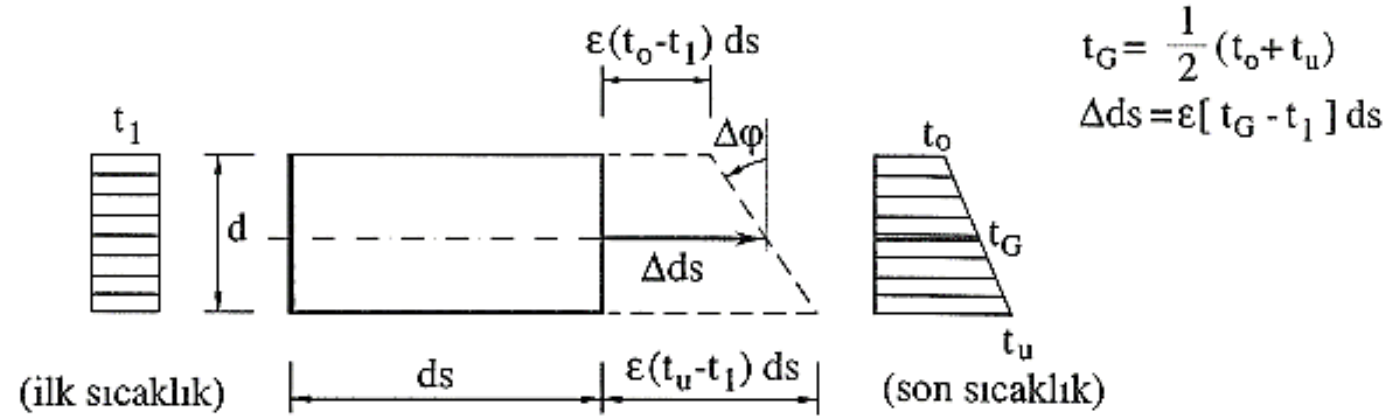
$$G = \frac{E}{2 \times (1 + \nu)} \quad , \quad \nu : \text{poisson oranı}$$

$$\text{Çelik için : } \nu \cong \frac{1}{3}$$

$$\text{Beton için : } \nu \cong \frac{1}{6}$$



## 11.4 Sıcaklık Değişmesinden Oluşan Şekildeğişmeler



ds elemanının

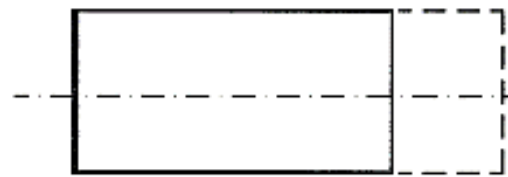
her noktasındaki ilk sıcaklık :  $t_1$

üst lifindeki son sıcaklık :  $t_2$

alt lifindeki son sıcaklık :  $t_u$

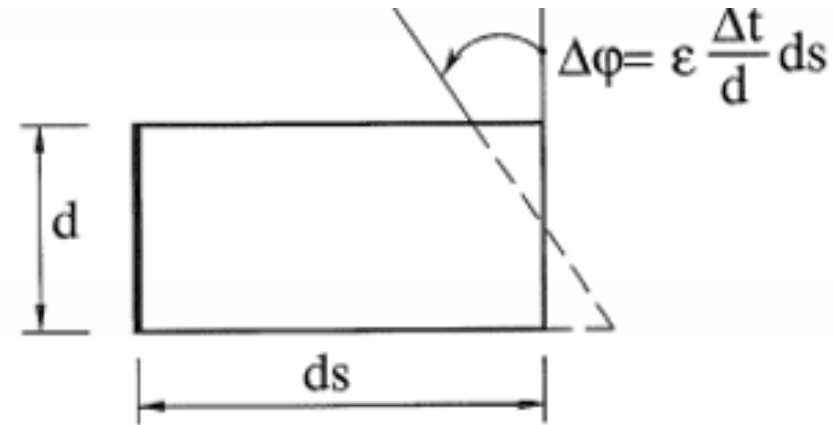
Düzensün sıcaklık değışmesi :  $t = \frac{1}{2} \times (t_2 + t_u) - t_1$

$$\Delta ds = \epsilon \times \left[ \frac{1}{2} \times (t_2 + t_u) - t_1 \right] ds \quad , \quad t = \left[ \frac{1}{2} \times (t_2 + t_u) - t_1 \right]$$



$$\Rightarrow \Delta ds = \epsilon \times t \times ds \Rightarrow \frac{\Delta ds}{ds} = \epsilon \times t$$

Farklı sıcaklık değişmesi :  $\Delta t = t_u - t_o$  ( $ds$  elemanın alt ve üst liflerindeki sıcaklık değişmesi) (dönme)



$$\Delta\varphi = \epsilon \times [(t_u - t_1) - (t_o - t_1)] \times \frac{ds}{d} \quad , \quad \Delta t = (t_u - t_o) = [(t_u - t_1) - (t_o - t_1)]$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \epsilon \times \Delta t \times \frac{ds}{d} \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{ds} = \frac{\epsilon \times \Delta t}{d}$$

$\epsilon$  : genleşme katsayısıdır. (beton ve çelikte  $\epsilon \cong 10^{-5} \text{ m/m}^\circ\text{C}$ )

Kesite hem kesit zorları, hem de sıcaklık değişmesi etkimesi durumunda şekildeğişirmeler

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \epsilon t$$

$$\frac{\Delta v}{ds} = \frac{T}{GF'}$$

$$\frac{\Delta \varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \frac{\epsilon \Delta t}{d}$$

şeklinde elde edilir.

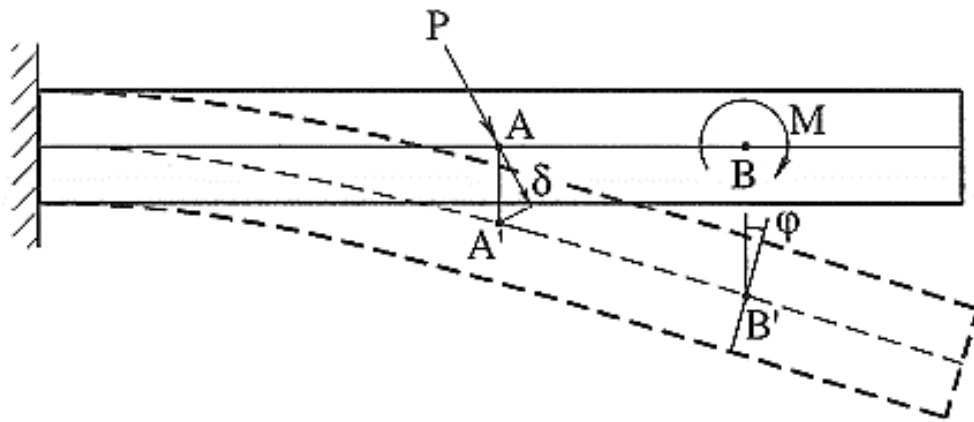
## 11.5 Virtüel İş Teoremi

Dengede olan bir sisteme sistemin geometrik uygunluk koşullarını sağlayan sonsuz küçük bir virtüel (keyfi, hayali) yerdeğiştirme verilmesi durumunda, dış kuvvetlerin yaptığı iş iç kuvvetlerin yaptığı işe eşit olur.

Şekil 11c de görülen konsol kirişe virtüel iş teoremi uygulandığında

dış kuvvetlerin işi = iç kuvvetlerin işi

ifadesi yazılacaktır.



Şekil 11c: Konsol kirişte yerdeğiştirme hesabı

$$\sum_{\text{Sistemde}} (P\delta + M\phi) = \int_{\text{Sistemde}} \left( M \times \frac{\Delta\phi}{ds} \times ds + N \times \frac{\Delta ds}{ds} \times ds + T \times \frac{\Delta v}{ds} \times ds \right)$$

$$\text{Dış kuvvetlerin işi} = \sum_{\text{Sistemde}} (P\delta + M\phi)$$

$$\text{İç kuvvetlerin işi} = \int_{\text{Sistemde}} \left( M \times \frac{\Delta\phi}{ds} \times ds + N \times \frac{\Delta ds}{ds} \times ds + T \times \frac{\Delta v}{ds} \times ds \right)$$

$$\text{veya;} \sum_{\text{Sistemde}} (P\delta + M\phi) = \int_{\text{Sistemde}} M \frac{\Delta\phi}{ds} ds + \int_{\text{Sistemde}} N \frac{\Delta ds}{ds} ds + \int_{\text{Sistemde}} T \frac{\Delta v}{ds} ds$$

şeklinde de yazılabilir.

### 11.5.1 Virtüel İş Teoremi İle Yerdeğiştirmelerin Hesabı

Dış etkiler altında bulunan izostatik veya hiperstatik bir sistemde verilen bir (m) kesitin herhangi bir doğrultudaki yerdeğiştirme bileşenini hesaplamak için virtüel iş teoreminden yararlanılır. Virtüel iş teoremi řu şekilde uygulanır.

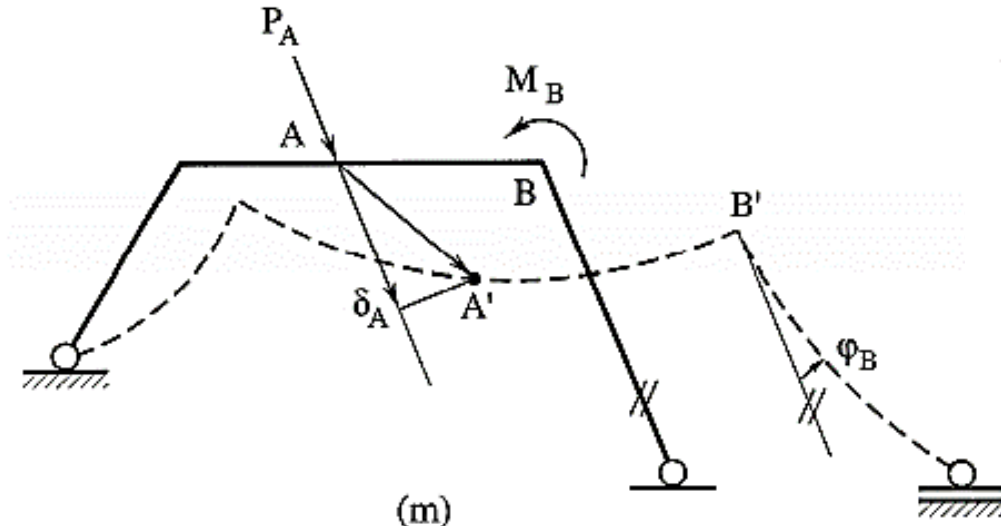
1) Dış etkilerin bulunmadığı buna karşılık yerdeğiştirmesi aranan noktaya aranan yerdeğiştirme doğrultusunda seçilen herhangi bir yönde birim kuvvetin (veya birim

momentin) etkitildiği sistem dengede olan sistem olarak alınır. Bu duruma birim yükleme durumu denir. Birim yükleme durumundaki kesit zorları  $\bar{M}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{T}$  ile gösterilir.

2) Dış etkiler altında bulunan ve yerdeğiştirmesi aranan sistem virtüel şekildeğiştirme durumu olarak alınır. Bu sistemde dış etkilerden oluşan kesit zorları  $M$ ,  $N$ ,  $T$  ve bu

duruma karşı gelen birim şekildeğiştirmeler  $\frac{\Delta\phi}{ds}$ ,  $\frac{\Delta ds}{ds}$ ,  $\frac{\Delta v}{ds}$  ile gösterilir.

3) Bu iki durum arasında virtüel iş teoremi uygulanır.



Virtüel şekildeğiştirme durumu

Kesit zorları :  $M, N, T$

$$\text{Şekildeğiştirmeler : } \frac{\Delta\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \frac{\varepsilon\Delta t}{d} \quad , \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \varepsilon t \quad , \quad \frac{\Delta v}{ds} = \frac{T}{GF'}$$

Dış kuvvetlerin işi = İç kuvvetlerin işi

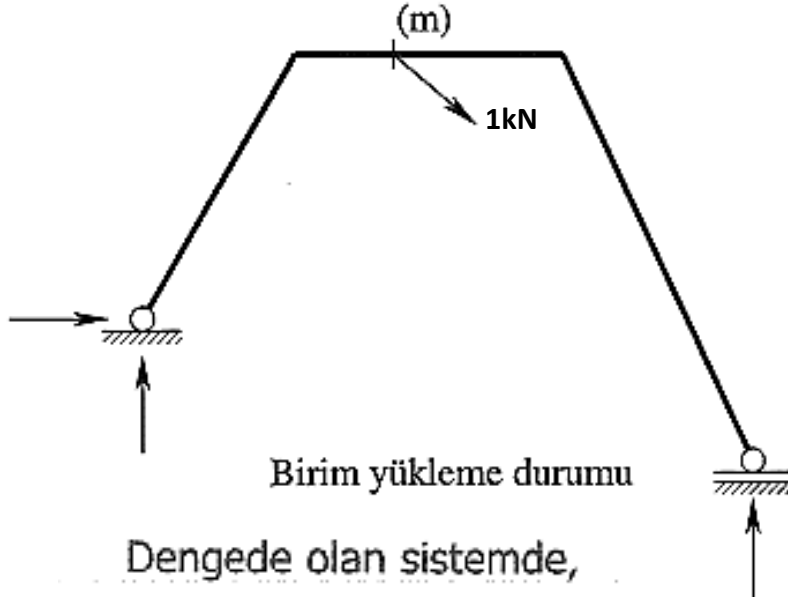
$$1 \times \delta = \int_{\text{Sistem}} \left( \bar{M} \frac{\Delta\varphi}{ds} ds + \bar{N} \frac{\Delta ds}{ds} ds + \bar{T} \frac{\Delta v}{ds} ds \right)$$

$$1 \times \delta = \int_{\text{Sistem}} \bar{M} \left( \frac{M}{EI} + \frac{\varepsilon\Delta t}{d} \right) ds + \int_{\text{Sistem}} \bar{N} \left( \frac{N}{EF} + \varepsilon t \right) ds + \int_{\text{Sistem}} \bar{T} \frac{T}{GF'} ds$$

$$1 \times \delta = \int \bar{M} \frac{\bar{M}}{EI} ds + \int \bar{N} \frac{\bar{N}}{EF} ds + \int \bar{T} \frac{\bar{T}}{GF'} ds + \int \bar{M} \frac{\varepsilon\Delta t}{d} ds + \int \bar{N} \varepsilon t ds$$

$$\text{Dış yüklerden oluşan yerdeğiştirme : } \int \bar{M} \frac{\bar{M}}{EI} ds + \int \bar{N} \frac{\bar{N}}{EF} ds + \int \bar{T} \frac{\bar{T}}{GF'} ds$$

$$\text{Sıcaklık değişiminden oluşan yerdeğiştirme : } \int \bar{M} \frac{\varepsilon\Delta t}{d} ds + \int \bar{N} \varepsilon t ds$$



Birim yükleme durumu

Dengede olan sistemde,

kesit zorları :  $\bar{M}, \bar{N}, \bar{T}$

ile gösterilecektir.

### 11.5.2 Özel Haller

1) Sıcaklık değişmesinin olmadığı sistemlerde,

$$1 \times \delta = \int M \frac{\bar{M}}{EI} ds + \int N \frac{\bar{N}}{EF} ds + \int T \frac{\bar{T}}{GF'} ds$$

2) Sıcaklık değişmesinin olmadığı sistemlerde pratikte çok kere olduğu gibi uzama ve kayma şekildeğişimleri terkedilirse,

$$1 \times \delta = \int M \frac{\bar{M}}{EI} ds$$

3) Kafes sistemlerde ise,

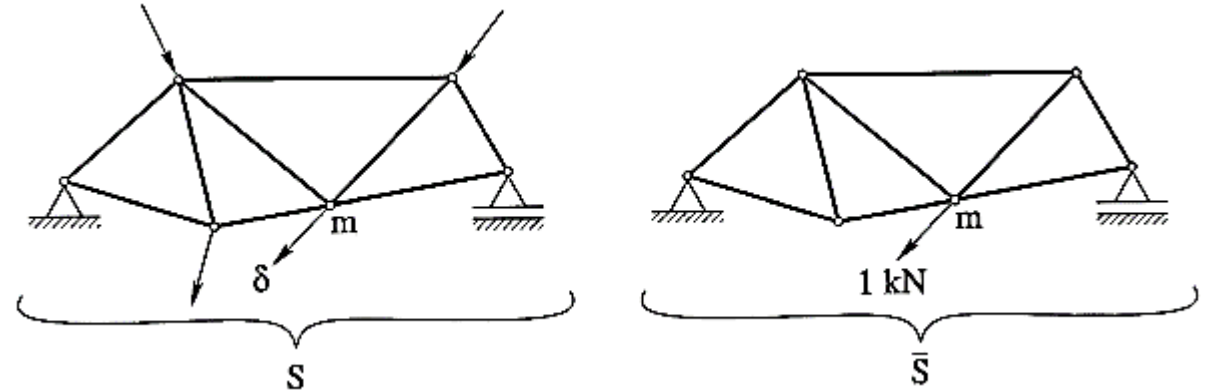
$$1 \times \delta = \sum_{\text{çubuk}} S \frac{\bar{S}}{EF} l + \sum_{\text{çubuk}} \bar{S} \epsilon t l$$

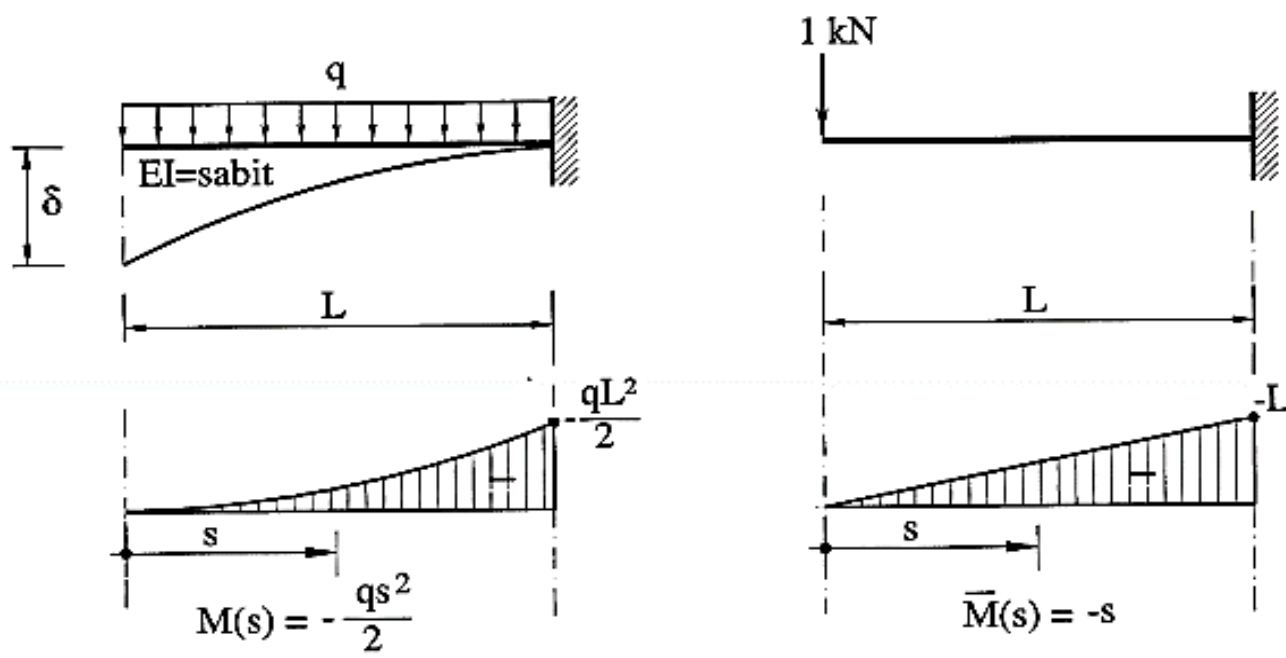
$S$  : Kafes sistemde dış yüklerden oluşan çubuk kuvveti

$\bar{S}$  : Kafes sistemde birim yüklemeden oluşan çubuk kuvveti

$l$  : Çubuk boyu

formülleri kullanılarak yerdeğişimler hesaplanır.





$$1 \times \delta = \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int \frac{T\bar{T}}{GF'} ds$$

Kayma şekil değiştirmelerinin ihmal edilmesi durumunda  $\int \frac{T\bar{T}}{GF'} ds = 0$  olur.

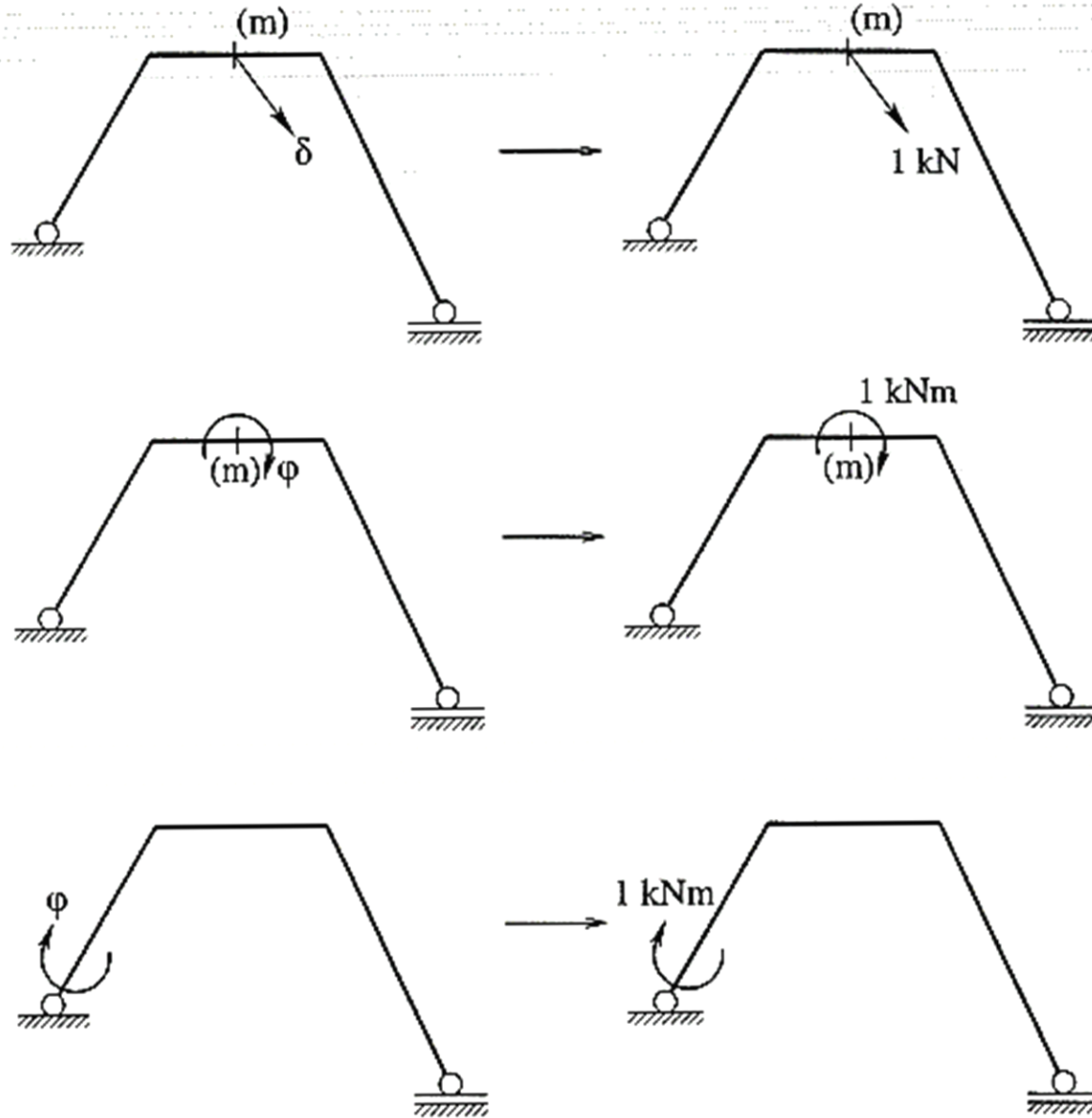
$$\Rightarrow \delta = \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds$$

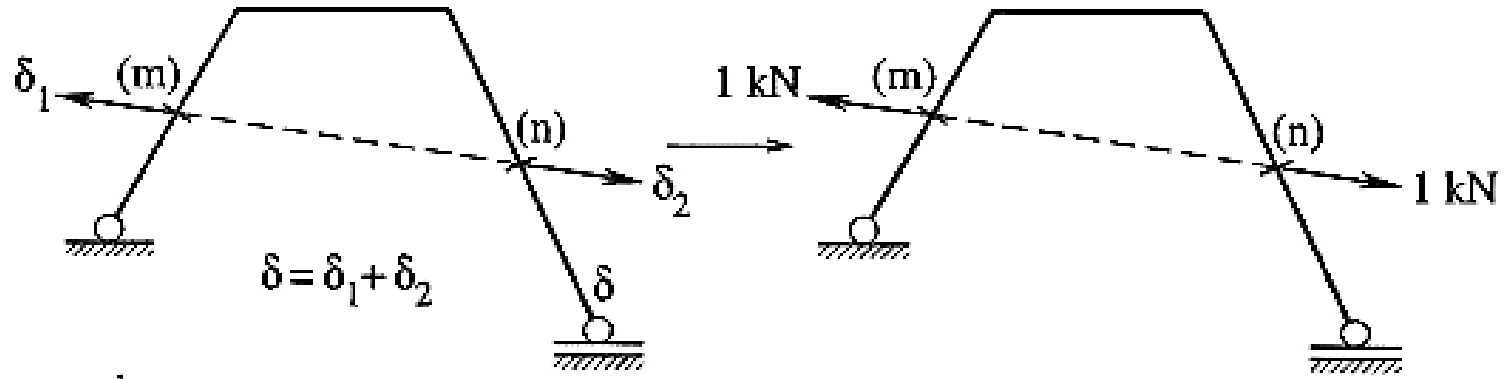
$$\delta = \int_{s=0}^L \frac{M(s)\bar{M}(s)}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_{s=0}^L \left( \frac{-qs^2}{2} \right) (-s) ds = \frac{1}{EI} \int_{s=0}^L \frac{qs^3}{2} ds = \frac{q}{EI} \left| \frac{s^4}{8} \right| = \frac{q}{EI} \left( \frac{L^4}{8} - 0 \right)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{qL^4}{8EI} \text{ olarak hesaplanır.}$$

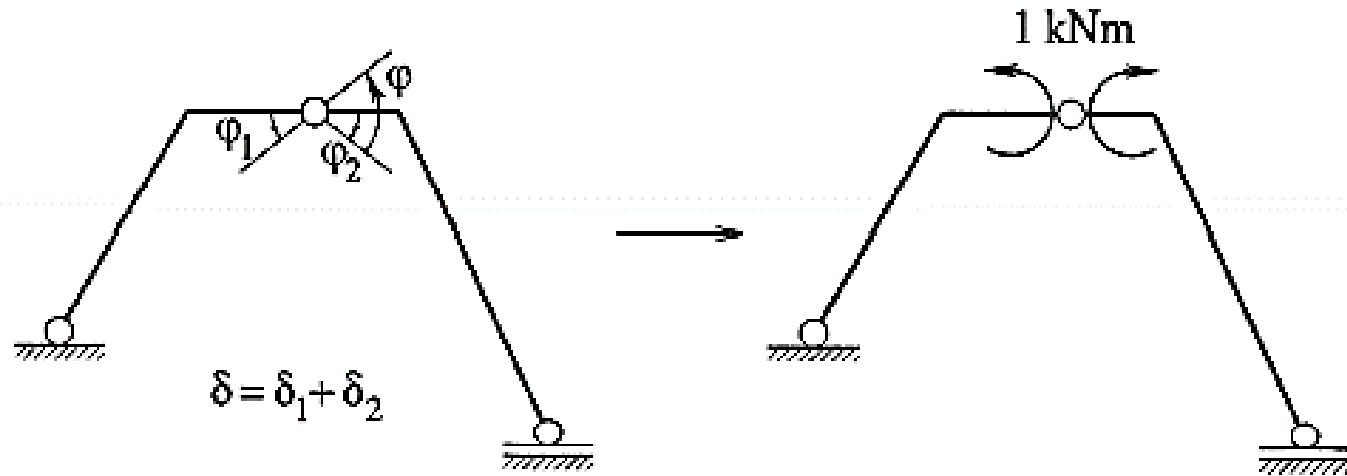


## 11.6 Birim Yüklemler





İki kesitin birbirine göre  
rölatif yerdeğiştirmesi



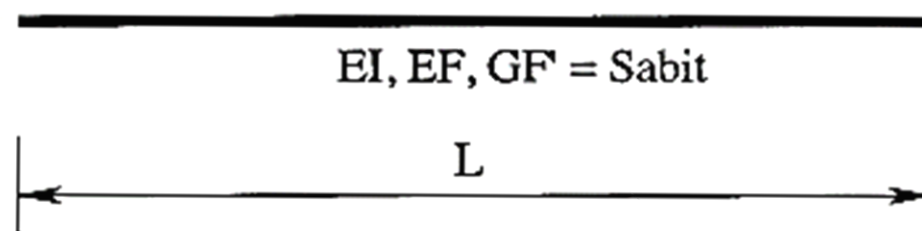
Bir mafsalin iki yanağının  
birbirine göre dönmesi

## 11.7 $\int \overline{MM} \frac{ds}{EI}$ İntegrallerinin Hesabı İçin Çarpım Tabloları

Virtüel iş teoremi yardımıyla yerdeğiştirme hesabında  $\int \overline{MM} \frac{ds}{EI}$  integrallerinin hesabı için tablolar düzenlenmiştir. Bu tablolara çarpım tabloları denir.

## 11.8 Doğru Eksenli Prizmatik Çubuklar

Eksen eğrisi doğru parçası olan ve enkesiti çubuk boyunca sabit olan çubuklardır.

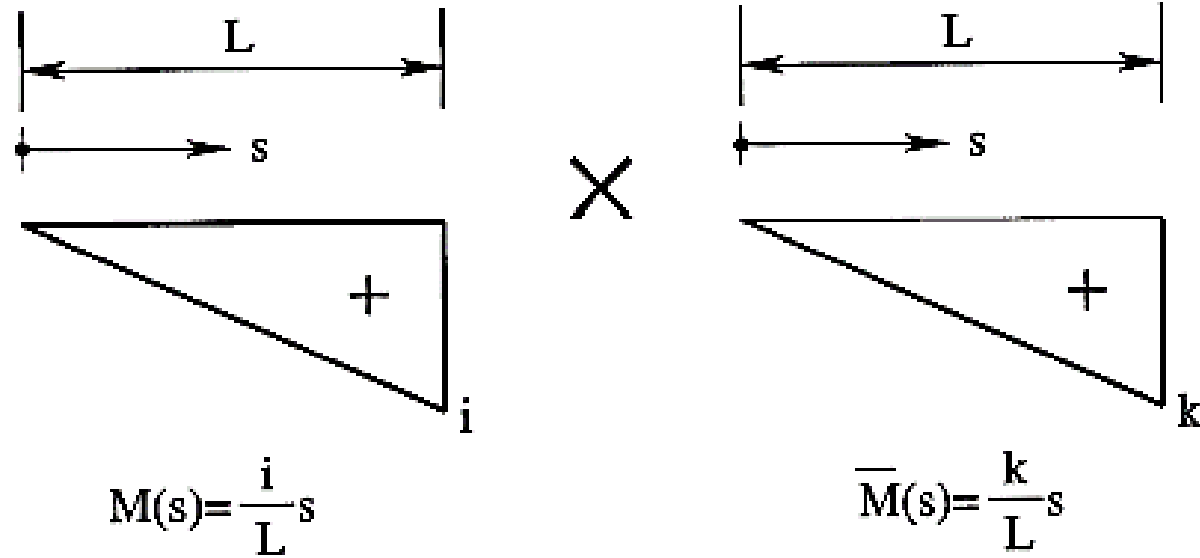


EI (eğilme rijitliği), EF (uzama rijitliği), GF' (kayma rijitliği) = Sabit

Bu çubuklarda EI sabit olduğundan  $\int \overline{MM} \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI} \int \overline{MM} ds$  olur.

Eğilme momenti diyagramlarının uygulamada çok karşılaşılan şekilleri için  $\int \overline{MM} ds$  integralleri hesaplanarak bir tablo halinde verilmiştir.

## Örnek



$$\int_{s=0}^{s=L} M(s)\bar{M}(s)ds = \int_0^L \frac{i \times k}{L^2} s^2 ds = \frac{i \times k}{L^2} \left| \frac{s^3}{3} \right| = \frac{i \times k}{L^2} \left( \frac{L^3}{3} - 0 \right) = \frac{1}{3} Lik$$

### 11.8.1 Çarpım Tablosunun Kullanılması

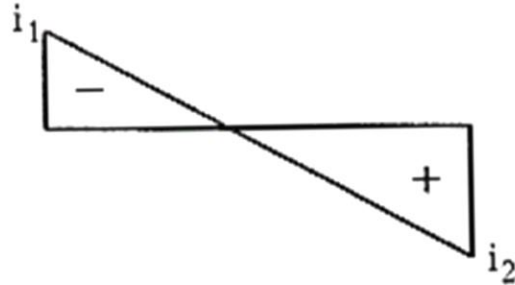
Çarpılacak diyagramlar tabloda bulunarak, bunlara ait satır ve kolonun kesim noktasından integralin sonucu alınır.

### 11.8.2 Çarpım Tablosunun Kullanılmasında Dikkat Edilecek Hususlar

1) Trapez diyagramlarda  $i_1, k_1$  soldaki  $i_2, k_2$  sağdaki ordinatları göstermektedir. Bu diyagramlara ait çarpım ifadeleri,

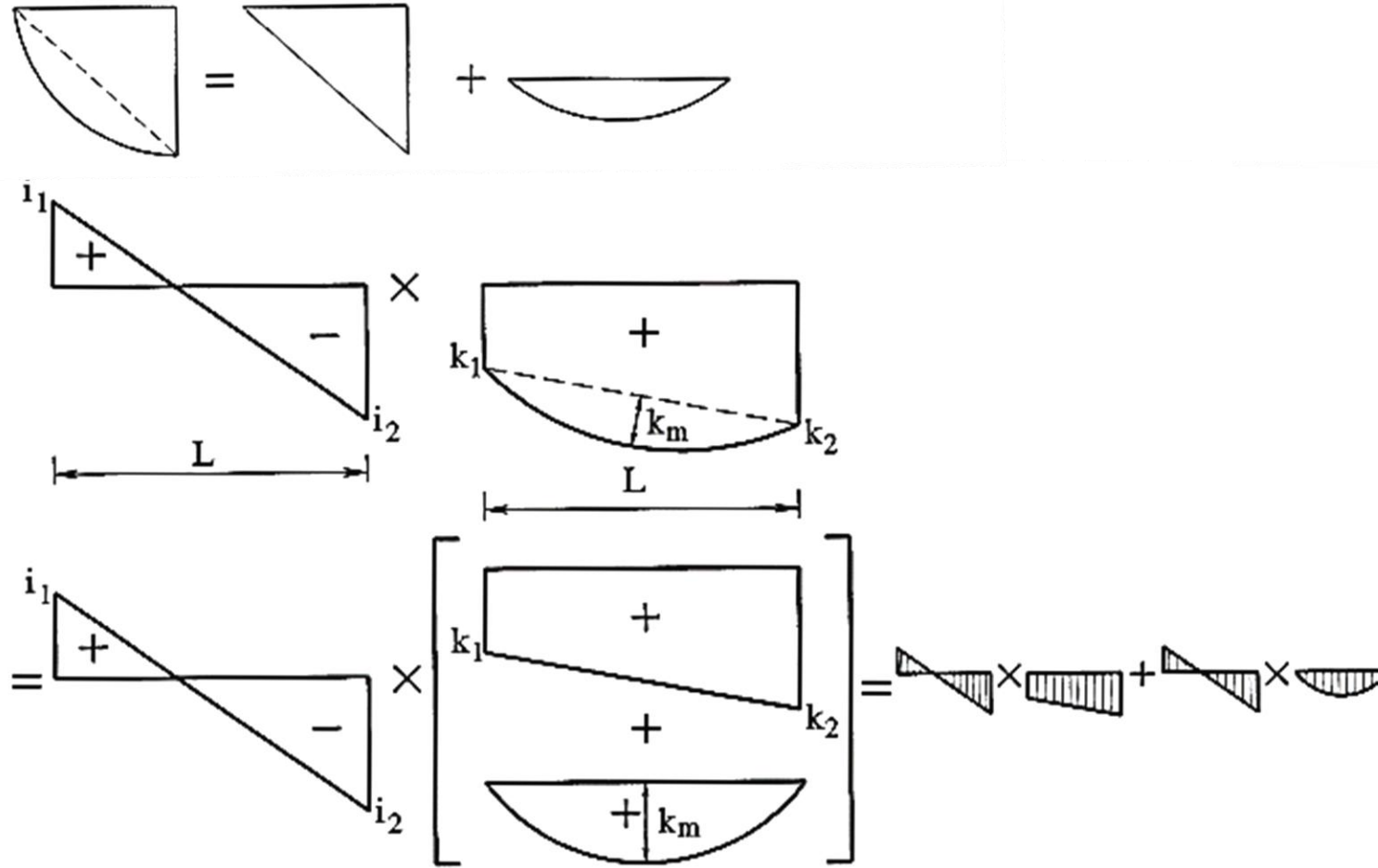
$i_1 > i_2$  ( $k_1 > k_2$ ) ve  $i_1 < i_2$  ( $k_1 < k_2$ ) hallerinin her ikisi için de geçerlidir.

2) Çarpımlarda ordinatların cebrik değerleri kullanılacaktır. Böylece tablolar, ordinatları ters işaretli olan trapezlerin çarpımı için de geçerlidir.



3) Yarım parabol diyagramlara ait çarpım ifadeleri bu diyagramların bir uçlarındaki teğetlerinin yatay olması halinde (yani  $T=0$  olması halinde) geçerlidir.

4) Tabloda bulunmayan bazı diyagramların çarpım integrali süperpozisyonla yapılabilir.

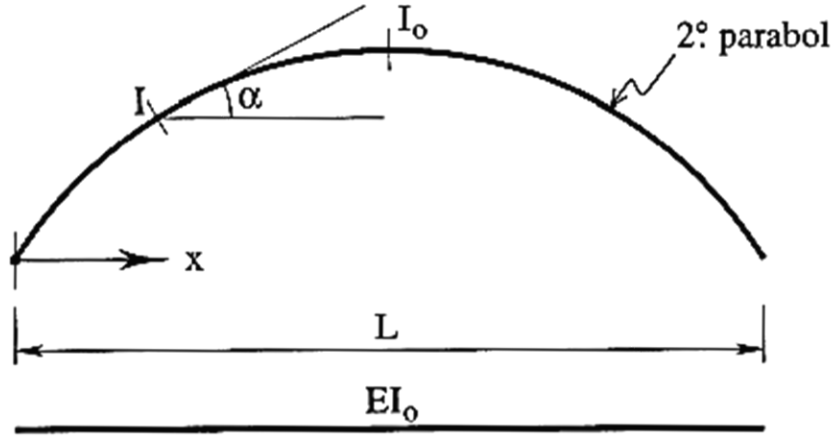


Genel kural :  $\int M\bar{M}ds = \int (A + B)(C + D)ds = \int ACds + \int ADds + \int BCds + \int BDds$

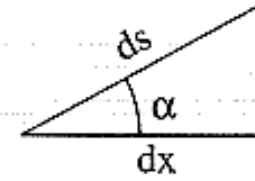
5) Çarpım tabloları  $\int T\bar{T}ds$  ve  $\int N\bar{N}ds$  integralleri için de aynen kullanılabilir.

## 11.9 Teorik Parabolik Kemerler

Eksen eğrisi 2.° parabolü olan ve atalet momenti  $I \times \cos \alpha = I_0$  şeklinde değişen eğri eksenli çubuklardır.



$I_0$  : Anahtardaki atalet momenti

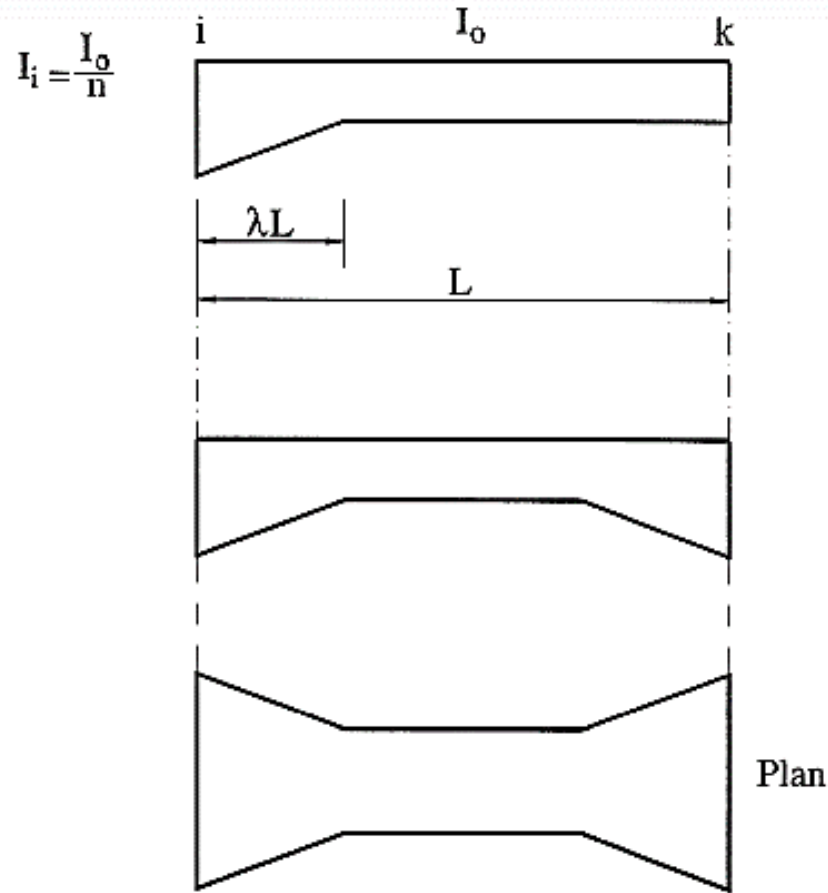


$$\frac{ds}{EI} = \frac{dx / \cos \alpha}{EI_0 / \cos \alpha} = \frac{dx}{EI_0}$$

$$\Rightarrow \int \bar{M} \frac{ds}{EI} = \int \bar{M} \frac{dx}{EI_0}$$

Buna göre teorik parabolik kemer üzerindeki çarpım integralinin hesabı aynı  $L$  açıklıklı ve atalet momenti  $I_0$  olan doğru eksenli prizmatik çubuk gibi yapılabilir.

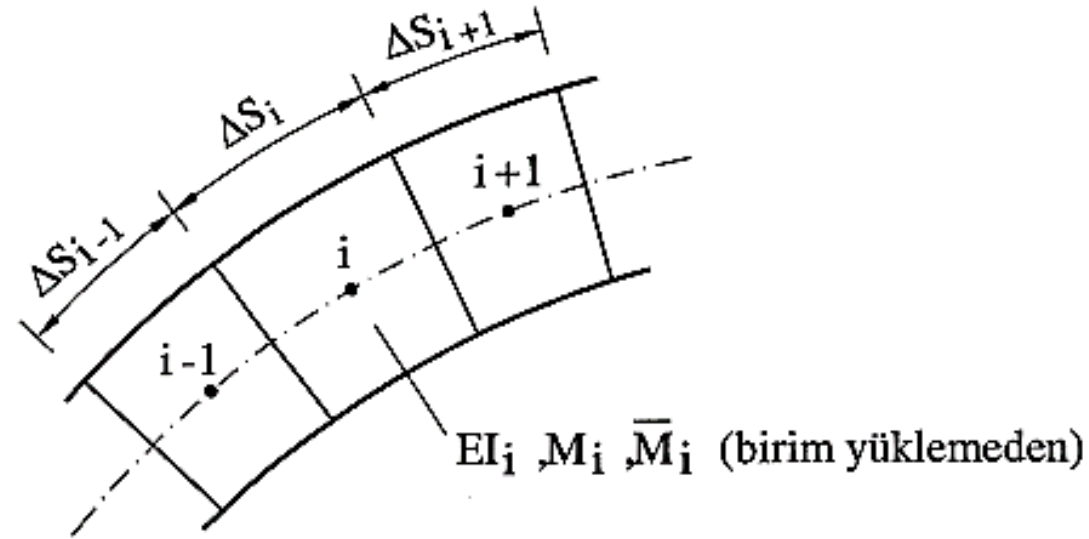
### 11.10 Doğru Eksenli Çubuklarda Atalet Momenti Değişiminin Bazı Özel Halleri



Atalet momenti değişken çubuklarda (guseli çubuklarda)  $\int M\bar{M} \frac{ds}{EI}$  integrallerinin hesabı için özel çarpım tabloları kullanılır.



### 11.11 Atalet Momenti ve Eksen Eğrisi Gelişigüzel Değişen Çubuklar

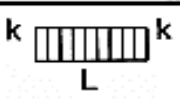
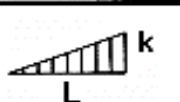


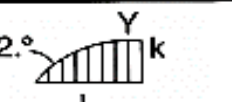
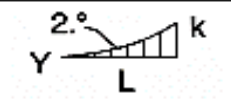
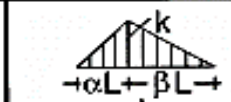



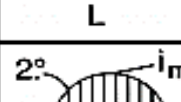
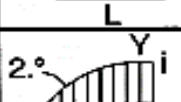

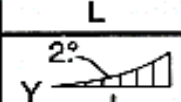
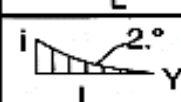

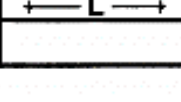


$$\int \frac{M\bar{M}}{EI} ds \equiv \sum_{i=1}^n M_i \bar{M}_i \frac{\Delta S_i}{EI_i}$$

n : parça sayısı

Bu tür çubuklarda  $\int \frac{M\bar{M}}{EI} ds$  integralinin hesabı için, çubuk yeterli sayıda küçük parçaya bölünür ve her parçanın orta noktasındaki  $EI_i, M_i, \bar{M}_i$  değerleri bulunarak integral sayısal olarak hesaplanır.

## Ek A.2

ÇARPIM TABLOSU $\left(\int_0^L M_1 M_2 ds\right)$							
							
	$Lik$	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{2}Lik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1 + \alpha)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1 + \beta)ik$
	$\frac{1}{2}L(i_1 + i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1 + 2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1 + i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1 + 5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1 + 3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk[(1 + \beta)i_1 + (1 + \alpha)i_2]$
	$\frac{2}{3}L i_m k$	$\frac{1}{3}L i_m k$	$\frac{1}{3}L i_m (k_1 + k_2)$	$\frac{8}{15}L i_m k_m$	$\frac{7}{15}L i_m k$	$\frac{1}{5}L i_m k$	$\frac{1}{3}L(1 + \alpha\beta) i_m k$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1 + 5k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5 - \beta - \beta^2)ik$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(5k_1 + 3k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5 - \alpha - \alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(k_1 + 3k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1 + \alpha + \alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1 + k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1 + \beta + \beta^2)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1 + \alpha)ik$	$\frac{1}{6}L[(1 + \beta)k_1 + (1 + \alpha)k_2]$	$\frac{1}{3}L(1 + \alpha\beta)ik_m$	$\frac{1}{12}L(5 - \beta - \beta^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1 + \alpha + \alpha^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$

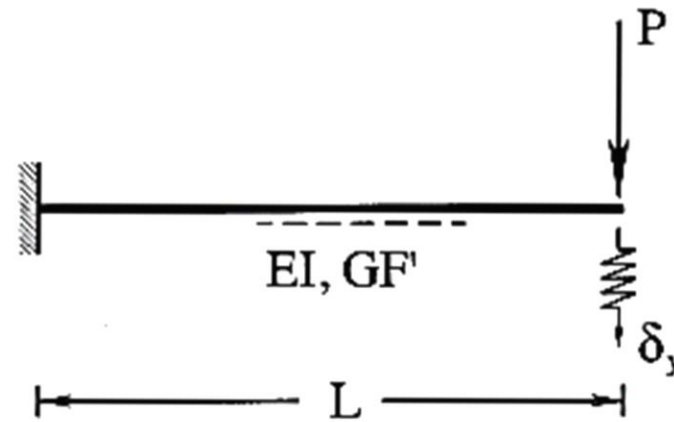
Y yazılı uçlarda 2.° parabolünün teğeti yataydır.

**PROBLEM 11.1**

Şekil 11.1 de görülen konsol kirişin  $\delta_y$  düşey yerdeğiştirmesini,

- Yalnız eğilme şekildeğiştirmelerinin işini dikkate alarak hesaplayınız.
- Eğilme şekildeğiştirmeleri ile birlikte kayma şekildeğiştirmelerinin işlerini de gözönüne alarak hesaplayınız.
- Dikdörtgen kesitli 3 m uzunluğundaki bir konsol kiriş için (a) ve (b) şıklarında elde edilen bağıntılardan yararlanarak istenen yerdeğiştirmeyi hesaplayınız ve sonuçları karşılaştırınız.

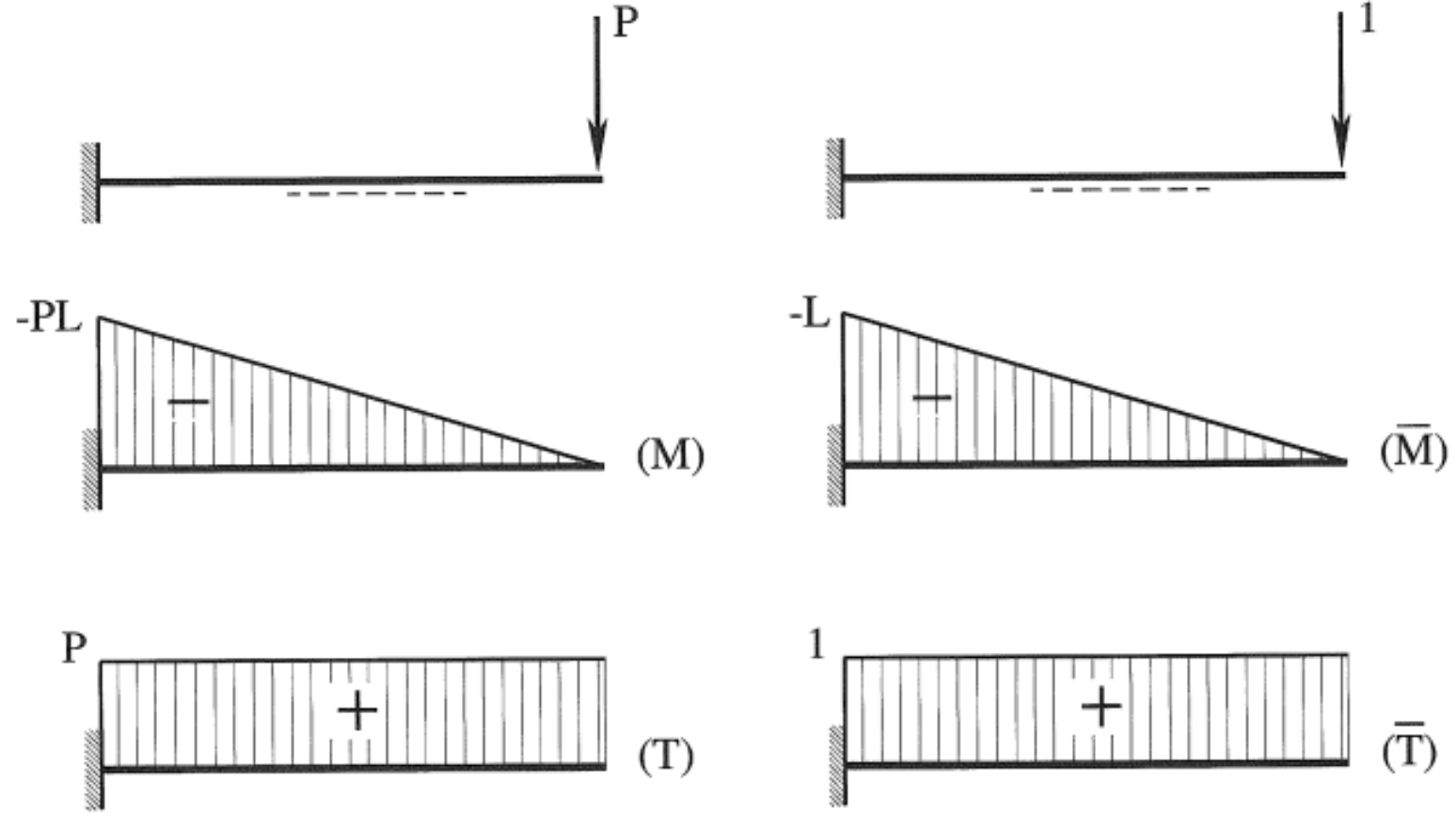
(Ek bilgi : Elastisite modülü  $E = 3 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  , poisson oranı  $\nu = 0.15$ )



Şekil 11.1: Konsol kiriş

## ÇÖZÜM 11.1

Şekil 11.1a da görüldüğü gibi, konsol kirişte dış yükten ve yerdeğiştirmesi aranan noktaya yapılan birim yüklemeden oluşan eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramlarının çizilmesiyle problemin çözümüne başlanır.



Şekil 11.1a: Konsol kirişte dış yük ve birim yüklemelerden oluşan kesit zorları

a) Yalnız eğilme şekildeğişikliklerinin işi gözönüne alındığında Şekil 11.1a da gösterilen (T) ve ( $\bar{T}$ ) diyagramlarının çizilmesine gerek yoktur. Bu durumda  $\delta_y$  düşey yerdeğişikliği virtüel iş teoreminden yararlanılarak

$$1^{kN} \times \delta_y = \int \left( \frac{\Delta\varphi}{ds} \right) (\bar{M}) ds = \int \left( \frac{M}{EI} \right) (\bar{M}) ds = \frac{1}{3} \times L \times (-PL) \times (-L) \times \frac{1}{EI} \Rightarrow \delta_{y, \text{eğilme}} = \frac{PL^3}{3EI} \checkmark$$

şeklinde hesaplanır.

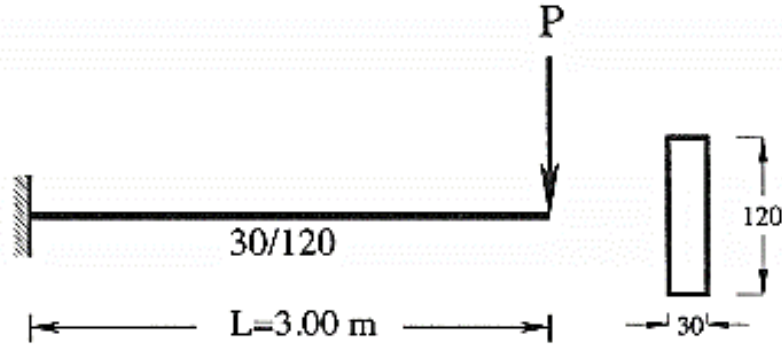
b) Eğilme ve kayma şekildeğişiklikleri işlerinin birlikte gözönüne alınması durumunda ise

$$1^{kN} \times \delta_y = \int \left( \frac{\Delta\varphi}{ds} \right) (\bar{M}) ds + \int \left( \frac{\Delta v}{ds} \right) (\bar{T}) ds = \int \left( \frac{M}{EI} \right) (\bar{M}) ds + \int \left( \frac{T}{GF} \right) (\bar{T}) ds$$

$$1^{kN} \times \delta_y = \frac{1}{3} \times L \times (-PL) \times (-L) \times \frac{1}{EI} + L(P) \times (1) \times \frac{1}{GF}$$

$$\Rightarrow \delta_{y, \text{eğilme+kayma}} = PL \left\{ \frac{L^2}{3EI} + \frac{1}{GF} \right\} \checkmark$$

c)



Yukarıdaki hesaplardan görüldüğü gibi kayma şekildeğiştirmelerinin etkisi hesaba katıldığında  $\delta_y$  düşey yerdeğiştirmesi

$$\Rightarrow \frac{\delta_{y,\text{eğilme+kayma}}}{\delta_{y,\text{eğilme}}} = \frac{7.714 \times 10^{-5} P}{6.944 \times 10^{-5} P} = 1.11 \checkmark$$

% 11 artmaktadır.

$h=1.20$  m ve  $b=0.30$  olan dikdörtgen kesit için:

- ✓ eğilme rijitliği :  $EI = (3 \times 10^6) \times \frac{0.30 \times 1.20^3}{12} = 129600 \text{ kNm}^2$
- ✓ kayma modülü :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3 \times 10^6}{2(1+0.15)} \cong 1.30 \times 10^6 \text{ kNm}^2$
- ✓ kayma rijitliği :  $GF' = (1.30 \times 10^6) \times \frac{5}{6} \times 0.30 \times 1.20 = 390000 \text{ kN}$

Yalnız eğilme şekildeğiştirmelerinin dikkate alınması durumunda,  $\delta_y$  düşey yerdeğiştirmesi

$$\delta_{y,\text{eğilme}} = \frac{P \times 3.00^3}{3 \times 129600} \Rightarrow \delta_{y,\text{eğilme}} = 6.944 \times 10^{-5} P \checkmark$$

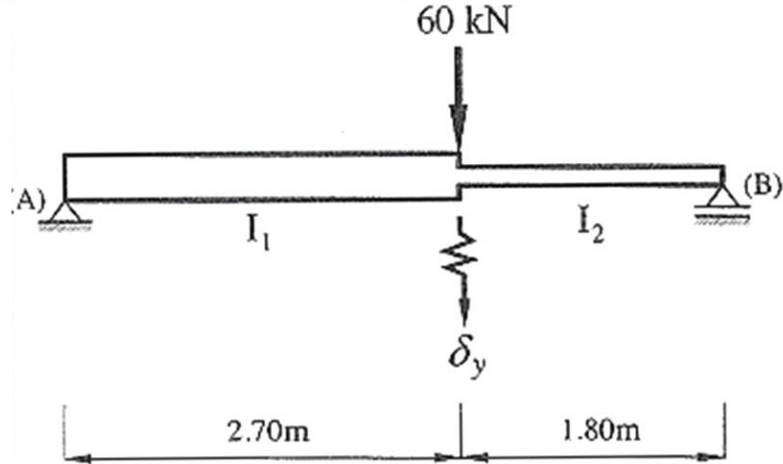
eğilme ve kayma şekildeğiştirmeleri işlerinin birlikte gözönüne alınması durumunda ise

$$\delta_{y,\text{eğilme+kayma}} = P \times 3.00 \times \left\{ \frac{3.00^2}{3 \times 129600} + \frac{1}{390000} \right\} \Rightarrow \delta_{y,\text{eğilme+kayma}} = 7.714 \times 10^{-5} P \checkmark$$

değerlerini alır.

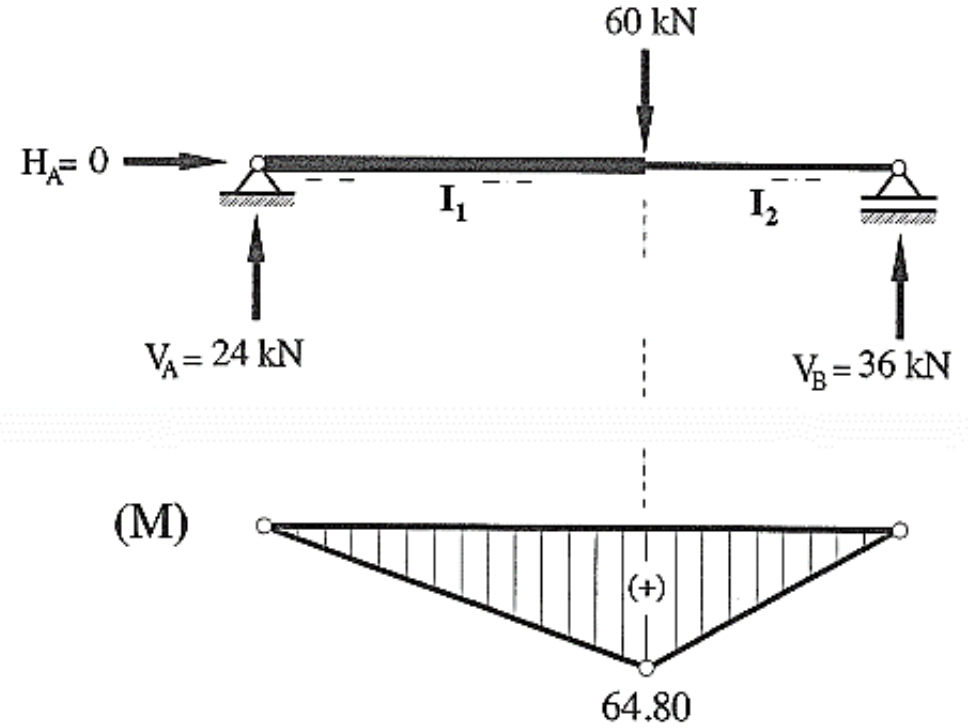
**PROBLEM 11.2**

Şekil 11.2 de görülen atalet momenti değişken basit kirişin  $\delta_y$  düşey yerdeğiştirmesini hesaplayınız.



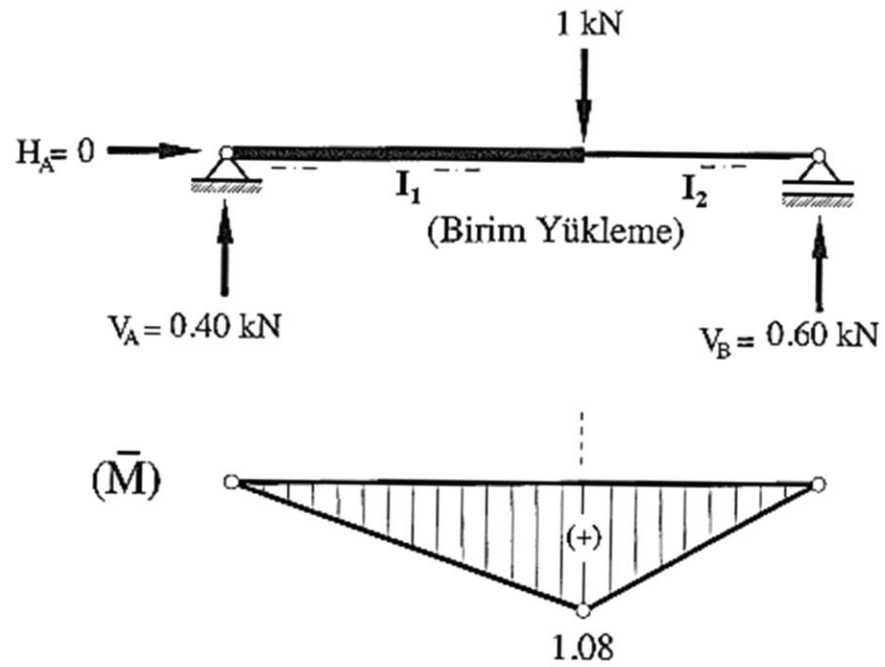
Şekil 11.2: Değişken kesitli basit kiriş

Basit kirişte dış yükten oluşan (M) diyagramı çizilir, Şekil 11.2a.



Şekil 11.2a: Dış yüklerden oluşan M diyagramı

Aranan yerdeğiştirme doğrultusunda birim kuvvet yüklemesi yapılarak ( $\bar{M}$ ) diyagramı elde edilir, Şekil 11.2b.



Şekil 11.2b: Birim yüklemekten oluşan ( $\bar{M}$ ) diyagramı

Daha sonra virtüel iş teoremi uygulanarak aranan  $\delta_y$  yerdeğiştirmesi hesaplanır.

$$\delta_y = \int \left( \frac{M}{EI} \right) (\bar{M}) ds$$

$$\delta_y = \frac{1}{3} \times 2.70 \times (64.80) \times (1.08) \times \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{3} \times 1.80 \times (64.80) \times (1.08) \times \frac{1}{EI_2}$$

$$\Rightarrow \delta_y = \left( \frac{62.99}{EI_1} + \frac{41.99}{EI_2} \right) m \checkmark$$

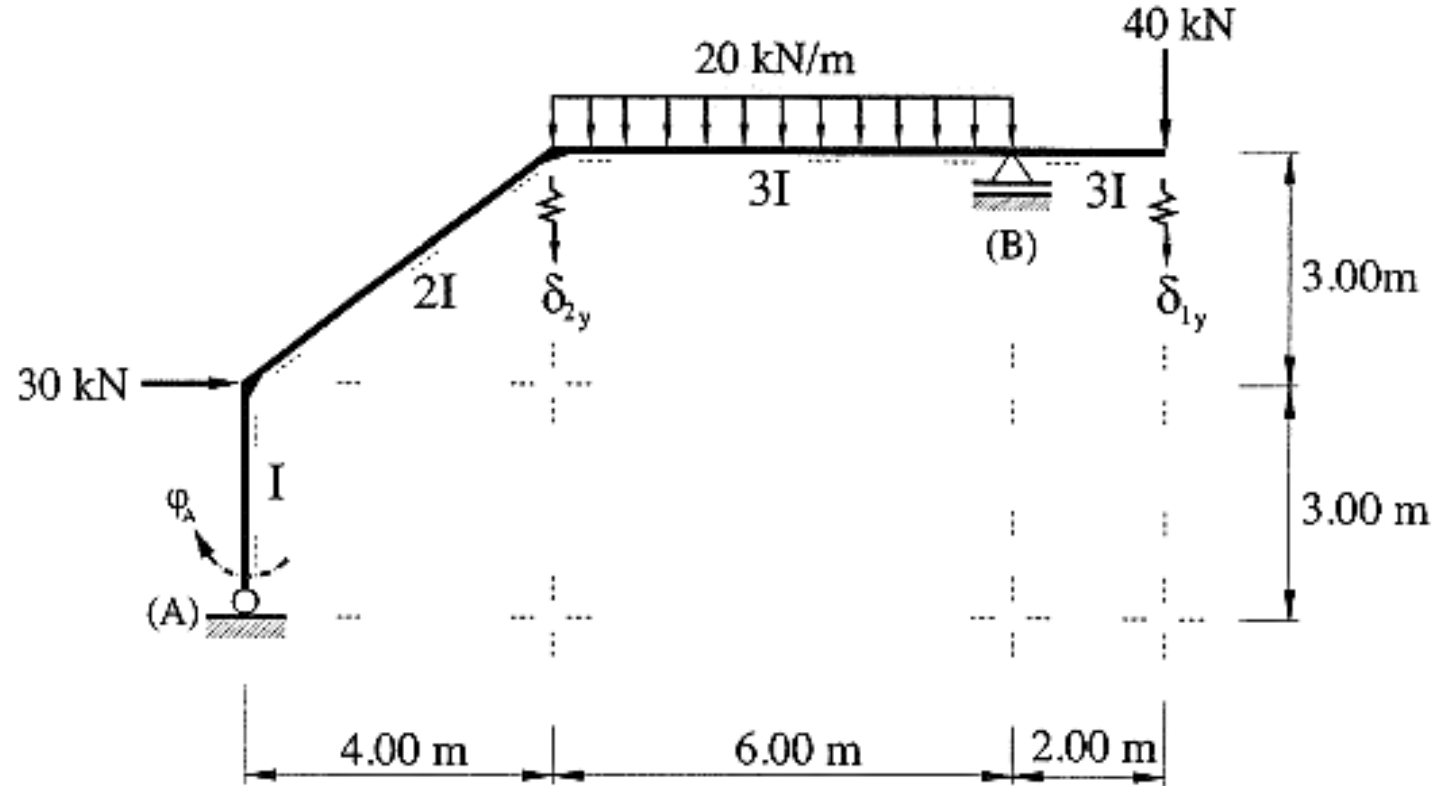


**PROBLEM 11.3**

Şekil 11.3 deki çerçevenin

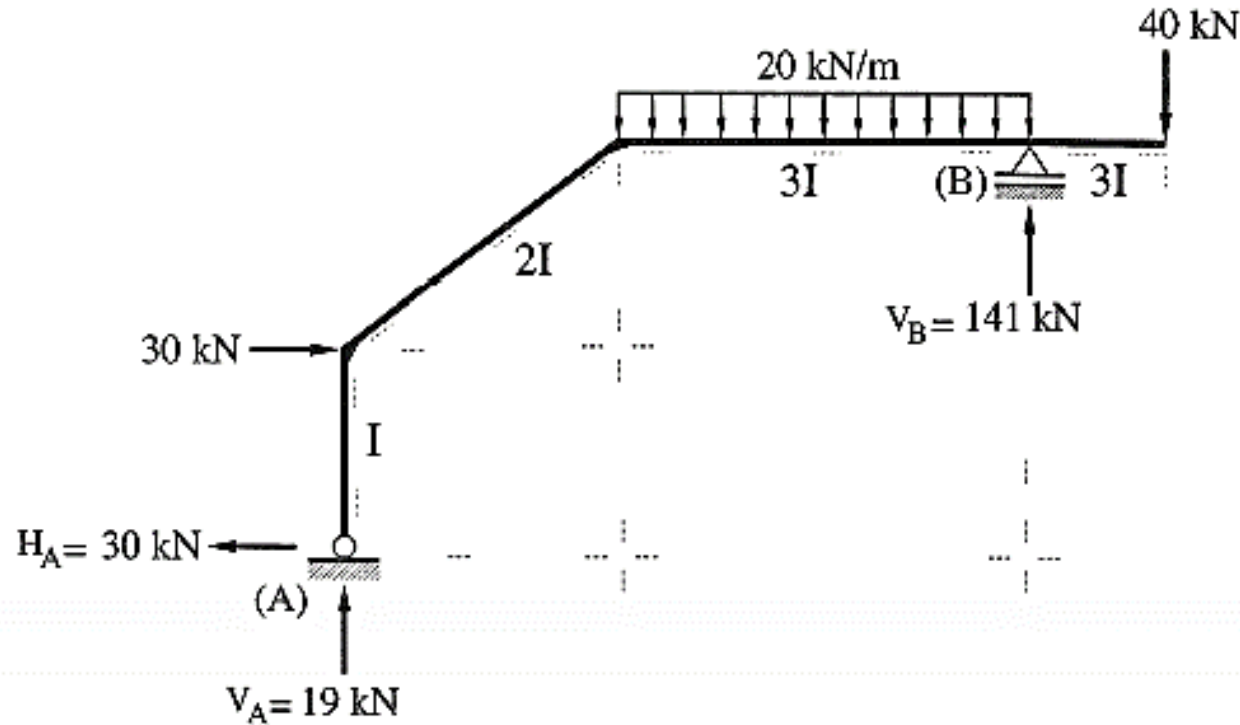
a) Dış yüklerden oluşan (M) eğilme momenti diyagramını çiziniz.

b)  $\varphi_A$  dönmesini ve  $\delta_{1y}$ ,  $\delta_{2y}$  düşey yerdeğiştirmelerini EI cinsinden hesaplayınız.



Şekil 11.3: Çerçeve sistem ve dış yükler

a) Çerçevenin Şekil 13.3a da gösterilen mesnet tepkileri hesaplandıktan sonra, (M) eğilme momenti diyagramı daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi elde edilir, Şekil 13.3b.



Şekil 13.3a: Dış yüklerden oluşan mesnet tepkileri

### Mesnet Tepkilerinin Bulunması:

$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad -H_A + 30 = 0 \quad \Rightarrow H_A = 30.00 \text{ kN} \leftarrow \checkmark$$

$$(\curvearrow+) \Sigma M_A = 0 \quad -V_B \times 10.00 + 20 \times 6.00 \times \left[ \frac{6.00}{2} + 4.00 \right] + 40 \times 12.00 + \dots$$

$$(U+) \Sigma M_B = 0$$

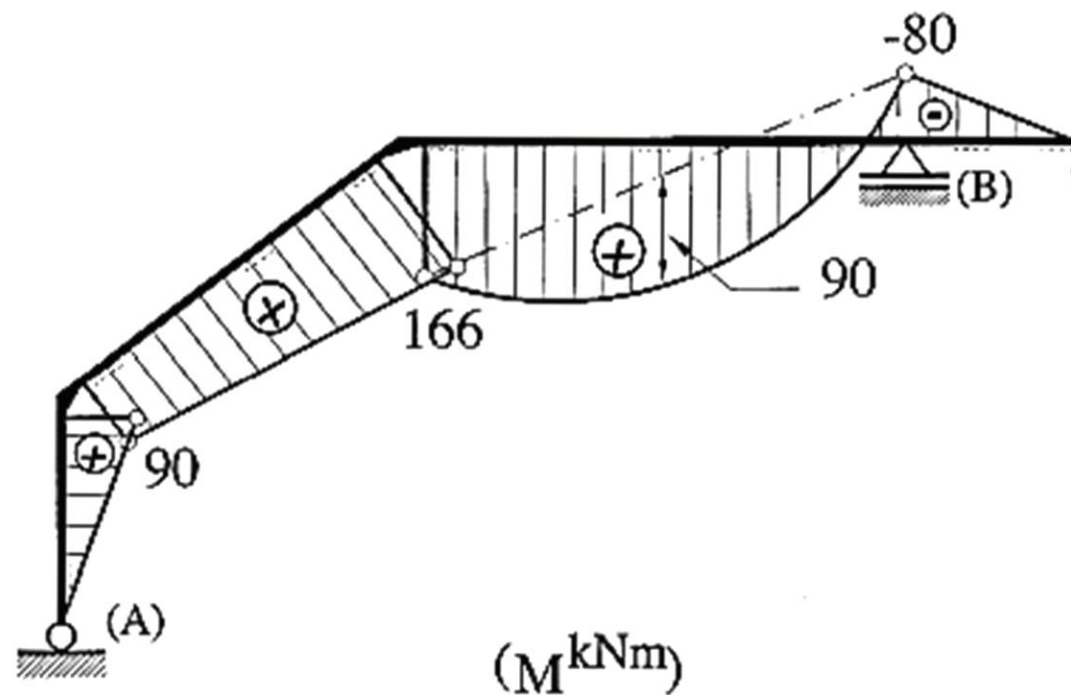
$$\dots + 30 \times 3.00 = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 141.00 \text{ kN} \uparrow \quad \checkmark$$

$$V_A \times 10.00 + 30 \times 6.00 - 30 \times 3.00 - 20 \times 6.00 \times \left[ \frac{6.00}{2} \right] + \dots$$

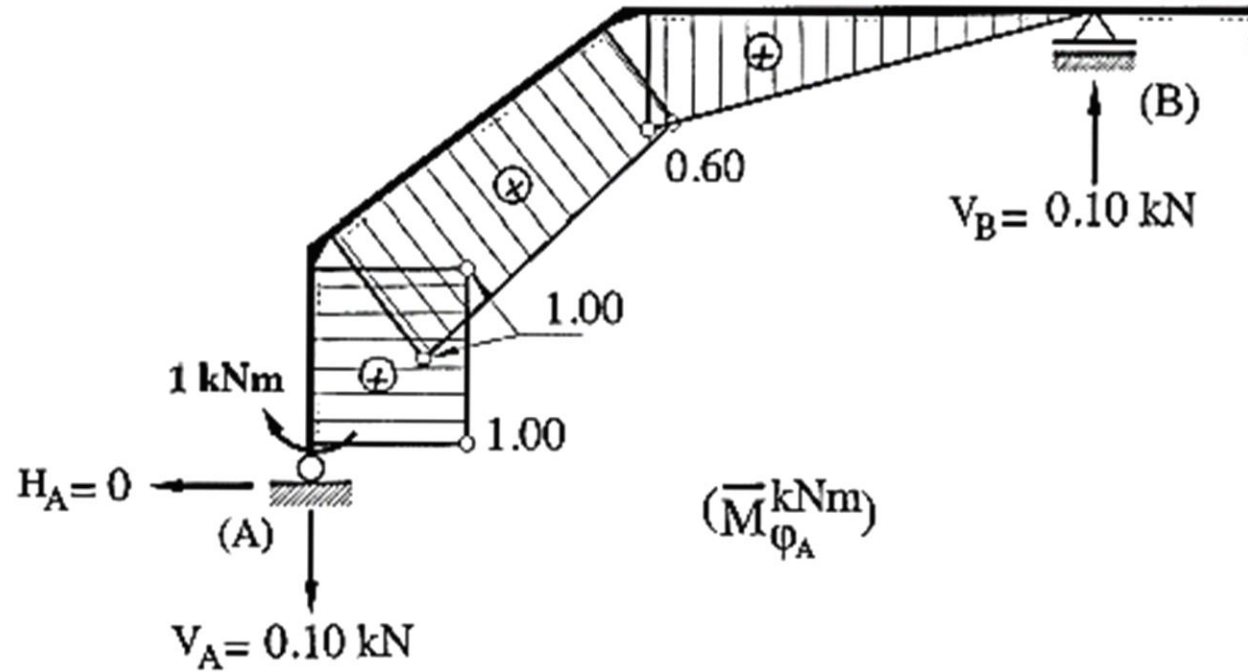
$$\dots + 40 \times 2.00 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 19.00 \text{ kN} \uparrow \quad \checkmark$$



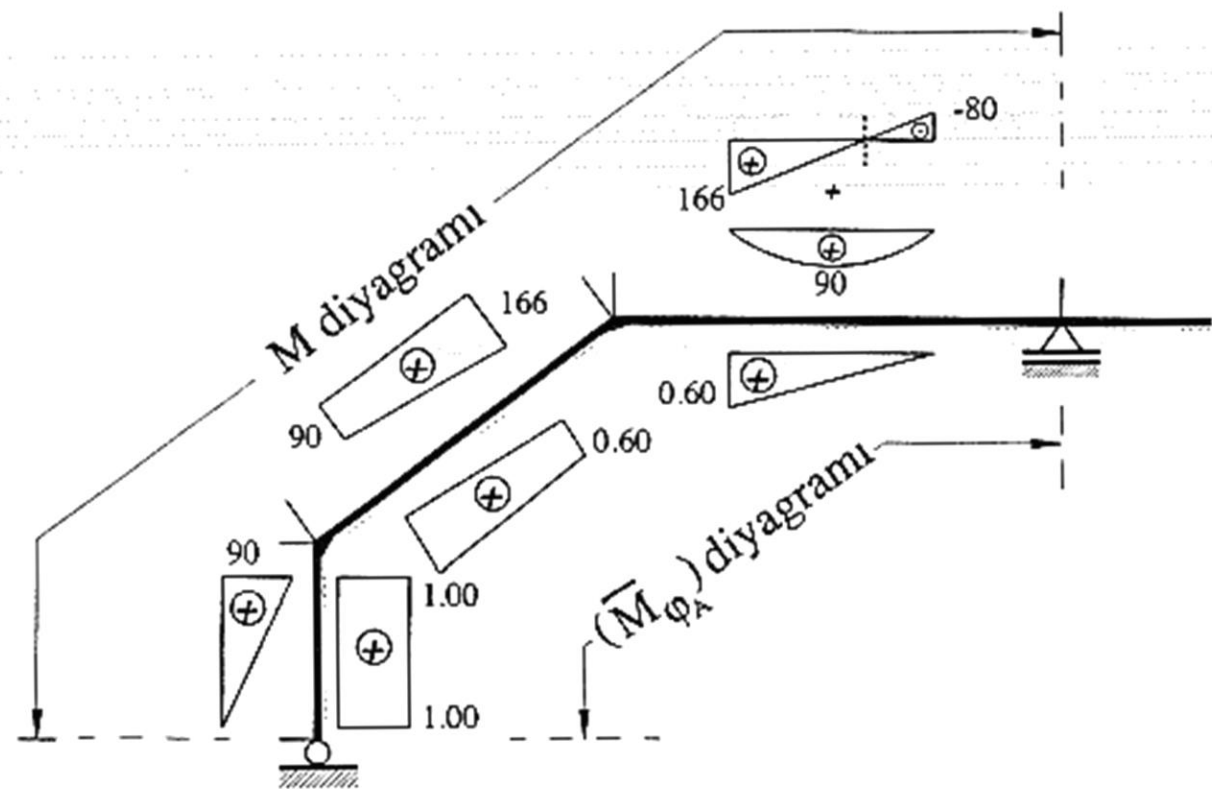
**Şekil 11.3b:** Dış yük durumu için (M) diyagramı

- b)  $\varphi_A$  dönmesinin hesabı için, A mesnetine aranan dönme doğrultusunda birim moment yüklemesi yapılır. Bu yüklemeden oluşan mesnet tepkileri, moment ve izdüşüm denge denklemlerinden yararlanılarak bulunur. Daha sonra, kritik kesitlerdeki eğilme momentleri hesaplanır ve  $(\bar{M}_{\varphi_A})$  diyagramı çizilir, Şekil 11.3c.



**Şekil 11.3c:**  $\varphi_A$  nın hesabı için yapılan birim yüklemeden oluşan  $(\bar{M}_{\varphi_A})$  diyagramı

$\varphi_A$  dönmesi, dış yüklerden elde edilen  $(M)$  diyagramı ile birim yüklemeden oluşan  $(\bar{M}_{\varphi_A})$  diyagramının çarpımı ile hesaplanır.



$$\varphi_A = \int (M)(\bar{M}_{\varphi_A}) \frac{ds}{EI}$$

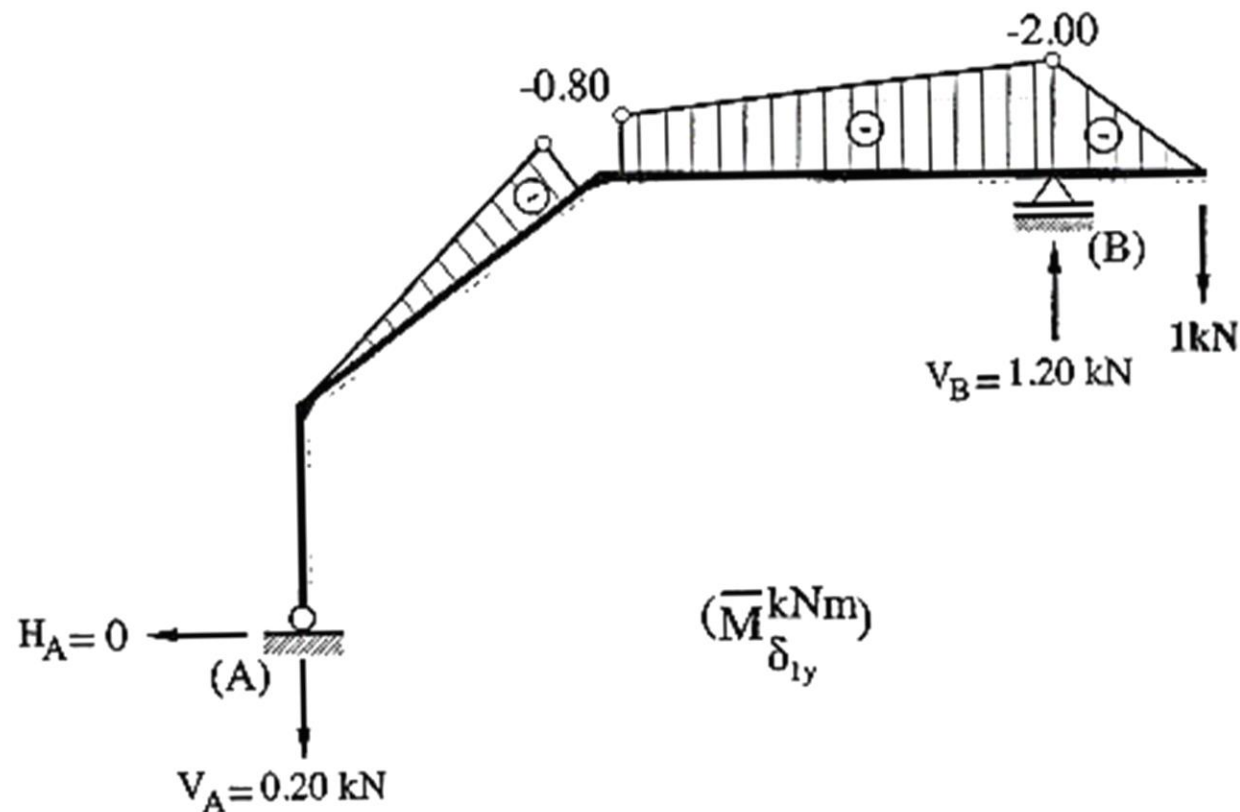
$$\varphi_A = \frac{1}{2} \times 3.00 \times (1) \times (90) \times \frac{1}{EI} + \dots\dots\dots$$

$$\dots + \frac{1}{6} \times 5.00 \times [2 \times (1) \times (90) + (166) \times (1) + (90) \times (0.60) + 2 \times (0.60) \times (166)] \times \frac{1}{2EI} + \dots\dots\dots$$

$$\dots + \frac{1}{6} \times 6.00 \times (0.60) \times [2 \times (166) - 80] \times \frac{1}{3EI} + \frac{1}{3} \times 6.00 \times (0.60) \times (90) \times \frac{1}{3EI}$$

$$\Rightarrow \varphi_A = \left( \frac{471.07}{EI} \right) \text{rad} \checkmark$$

$\delta_{1y}$  düşey yerdeğiştirmesinin hesabında, yerdeğiştirmesi aranan noktaya yerdeğiştirme doğrultusunda 1 kN luk düşey kuvvet yüklenir. Bu birim yüklemeden oluşan mesnet tepkileri hesaplandıktan sonra, kritik kesitlerdeki eğilme momentleri elde edilerek  $(\bar{M}_{\delta_{1y}})$  diyagramı çizilir, Şekil 11.3d.



**Şekil 11.3d:**  $\delta_{1y}$  nin hesabı için yapılan birim yüklemeden oluşan  $(\bar{M}_{\delta_{1y}})$  diyagramı

$\delta_{1y}$  düşey yerdeğiştirmesi, dış yükler için elde edilen (M) diyagramı ile birim yüklemeden oluşan ( $\bar{M}_{\delta_{1y}}$ ) diyagramının çarpımı ile bulunur.

$$\delta_{1y} = \int (M)(\bar{M}_{\delta_{1y}}) \frac{ds}{EI}$$

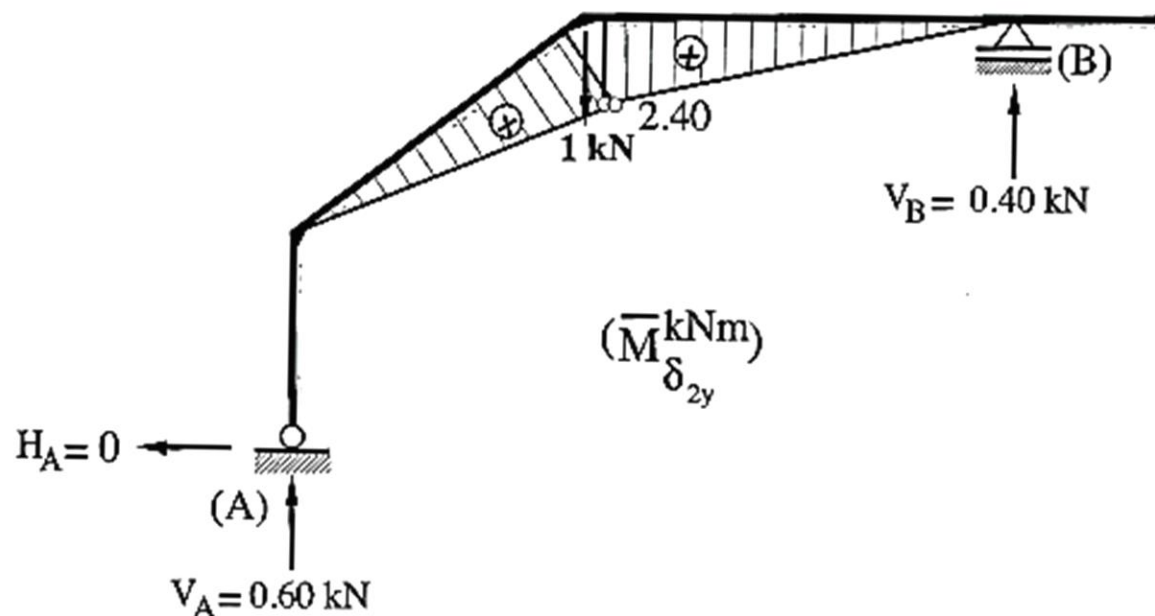
$$\delta_{1y} = \frac{1}{6} \times 5.00 \times (-0.80) \times [2 \times (166) + 90] \times \frac{1}{2EI} + \frac{1}{3} \times 6.00 \times (90) \times [-0.80 - 2.0] \times \frac{1}{3EI} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{6} \times 6.00 \times [2 \times (-0.80)(166) + 2 \times (-2)(-80) + (-80)(-0.80) + (-2)(166)] \times \frac{1}{3EI} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{3} \times 2.00 \times (-80)(-2) \times \frac{1}{3EI} \quad \Rightarrow \delta_{1y} = \left( -\frac{344.31}{EI} \right) m$$

$\delta_{2y}$  düşey yerdeğiştirmesinin hesabında, yerdeğiştirmesi aranan noktaya yerdeğiştirme doğrultusunda 1 kN luk düşey kuvvet yüklenir ve bu yüklemeden oluşan mesnet tepkileri hesaplanır. Bu hesabın ardından kritik kesitlerdeki eğilme momentleri elde edilerek ( $\bar{M}_{\delta_{2y}}$ ) diyagramı çizilir, Şekil 11.3e.





**Şekil 11.3e:**  $\delta_{2y}$  nin hesabı için yapılan birim yüklemenden oluşan  $(\bar{M}_{\delta_{2y}})$  diyagramı

$\delta_{2y}$  düşey yerdeğiştirmesi, dış yüklerden elde edilen  $(M)$  diyagramı ile birim yüklemenden oluşan  $(\bar{M}_{\delta_{2y}})$  diyagramının çarpımı ile hesaplanır.

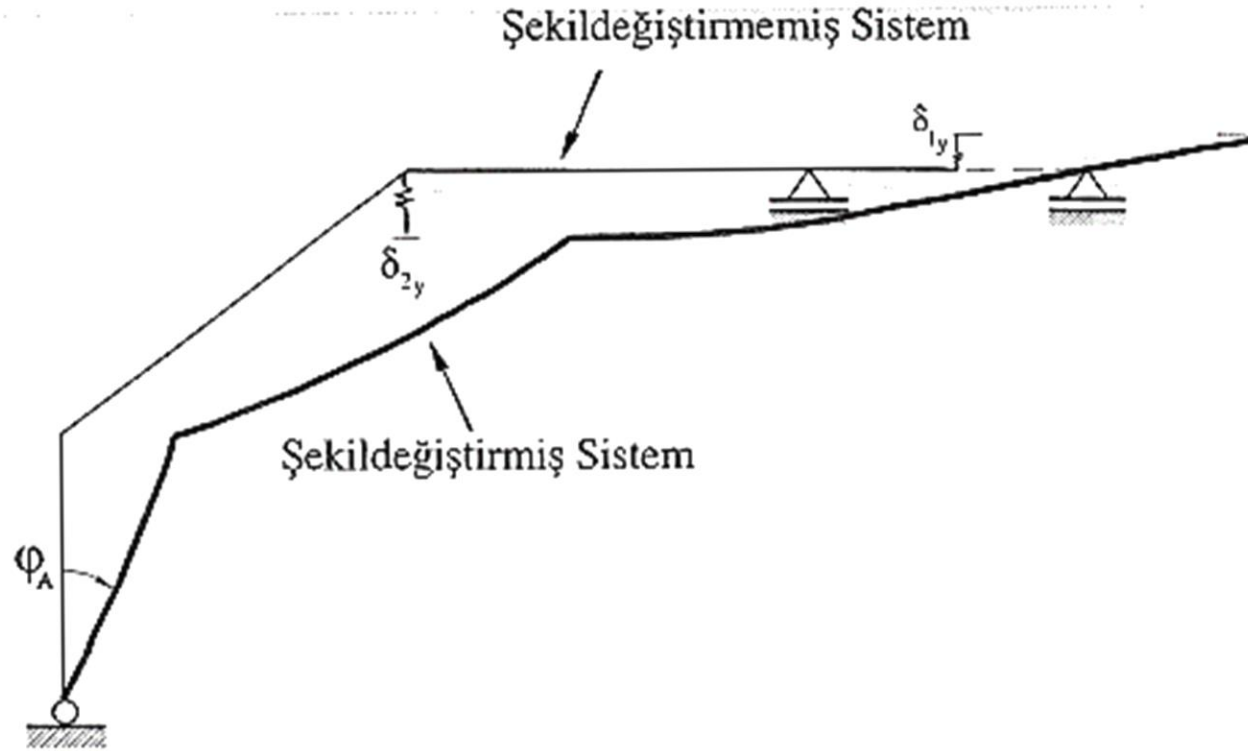
$$\delta_{2y} = \int (M)(\bar{M}_{\delta_{2y}}) \frac{ds}{EI}$$

$$\delta_{2y} = \frac{1}{6} \times 5.00 \times (2.40) \times [2(166) + 90] \times \frac{1}{2EI} + \frac{1}{3} \times 6.00 \times (2.40)(90) \times \frac{1}{3EI} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{6} \times 6.00 \times (2.40) \times [2(166) - 80] \times \frac{1}{3EI} \Rightarrow \delta_{2y} = \left( \frac{767.60}{EI} \right) \text{m} \checkmark$$



$\delta_{1y}$ ,  $\delta_{2y}$  düşey yerdeğıştirmeleri ve  $\varphi_A$  dönmesi Şekil 11.3f de şekildeğıştirmiş sistem üzerinde gösterilmiştir.

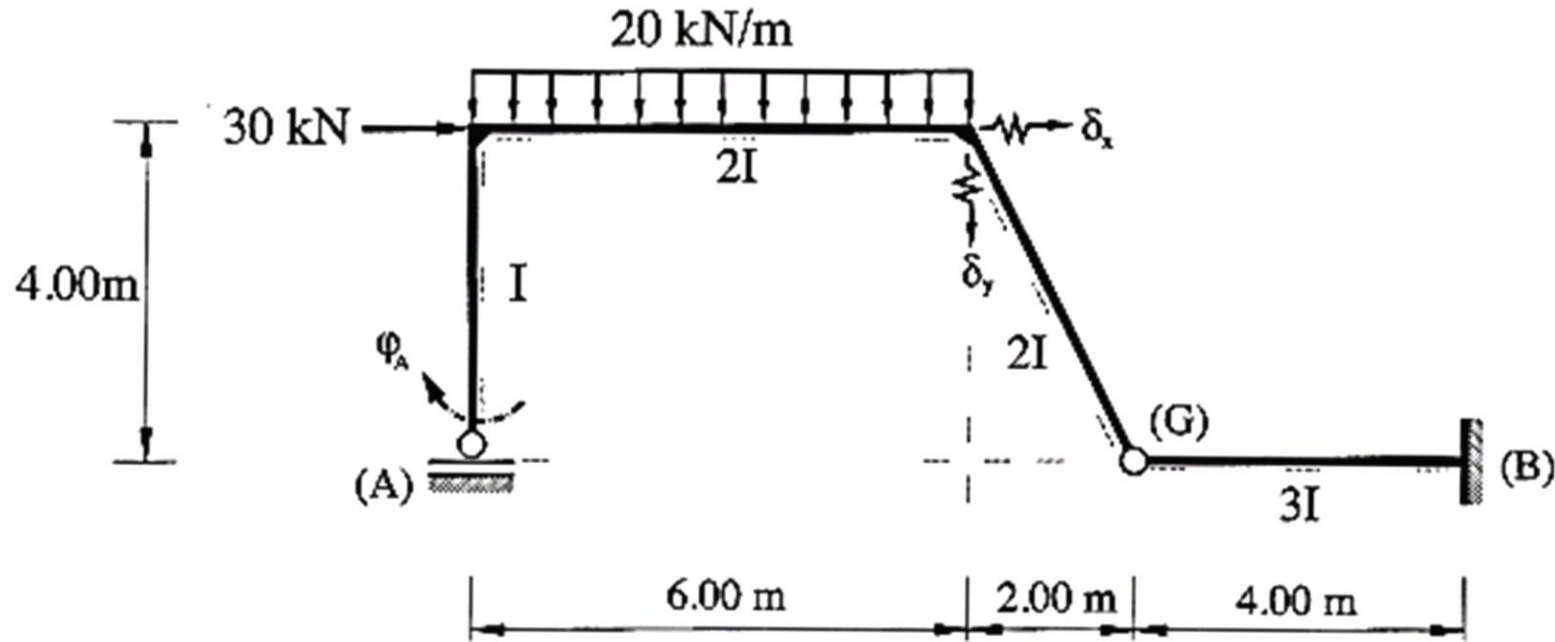


**Şekil 11.3f:** Sistemin şekildeğıştirmiş durumu

**PROBLEM 11.4**

Şekil 11.4 deki sistemin  $\phi_A$  dönmesini,  $\delta_x$  ve  $\delta_y$  doğrusal yerdeğiştirmelerini  $EI$  eğilme rijitliğine bağlı olarak hesaplayınız.

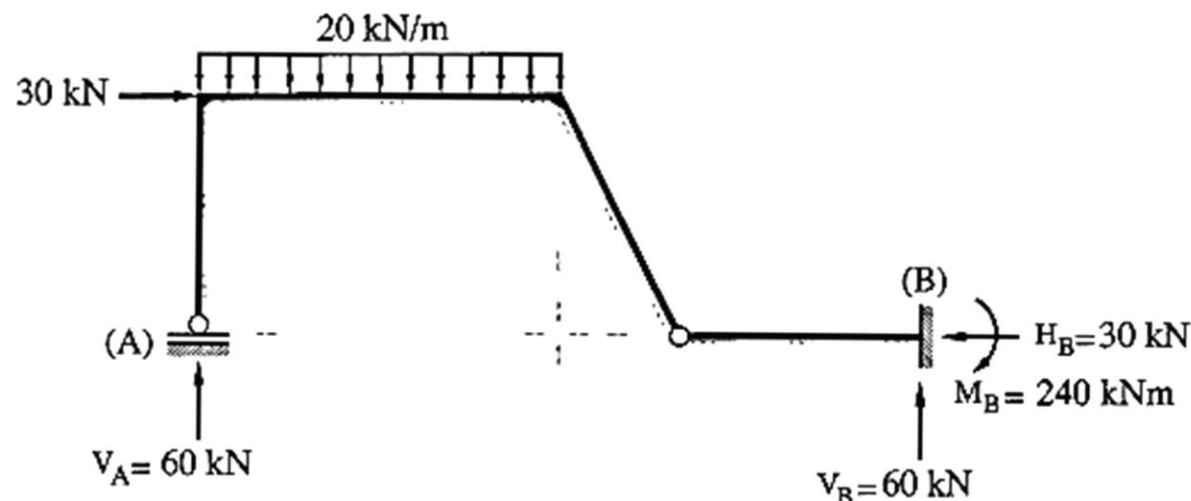
(Not: Uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin etkisi terkedilecektir.)



Şekil 11.4

## ÇÖZÜM 11.4

İlk olarak; yapı sisteminin Şekil 11.4a da verilen mesnet tepkileri, moment ve izdüşüm denge denklemlerinden yararlanarak elde edilir.



Şekil 11.4a: Dış yüklerden oluşan mesnet tepkileri

**Mesnet tepkilerinin bulunması:**

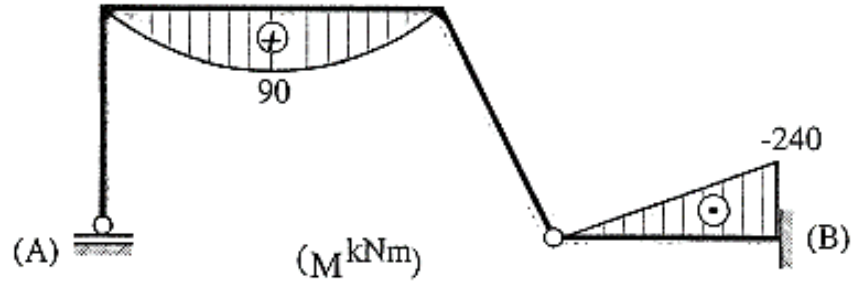
$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad -H_B + 30 = 0 \quad \Rightarrow H_B = 30 \text{ kN} \leftarrow \checkmark$$

$$(\cup+) \Sigma M_{G, \text{sol}} = 0 \quad V_A \times 8.00 + 30 \times 4.00 - 20 \times 6.00 \times \left[ \frac{6.00}{2} + 2.00 \right] = 0 \\ \Rightarrow V_A = 60.00 \text{ kN} \uparrow \checkmark$$

$$(\uparrow+) \Sigma F_y = 0 \quad V_A - 20 \times 6.00 + V_B = 0 \quad \Rightarrow V_B = 60.00 \text{ kN} \uparrow \checkmark$$

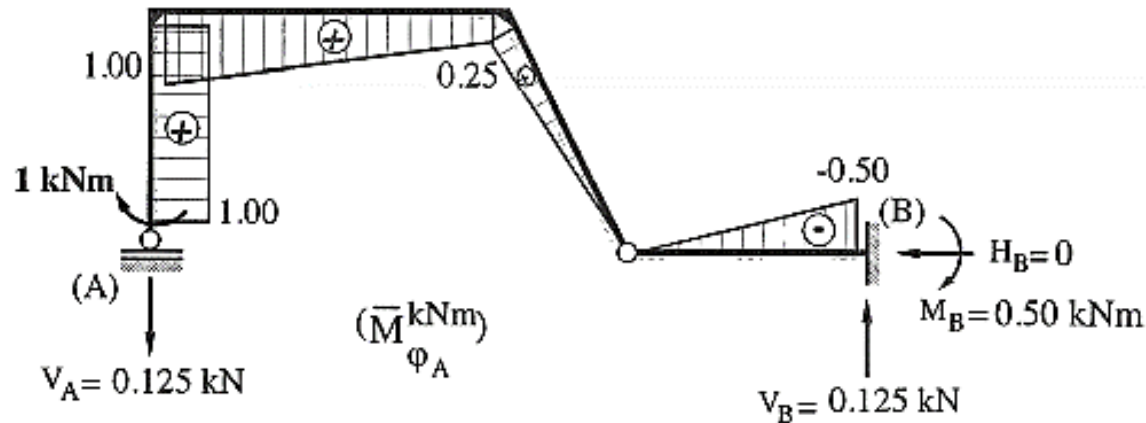
$$(\cup+) \Sigma M_B = 0 \quad V_A \times 12.00 + 30 \times 4.00 - 20 \times 6.00 \times \left[ \frac{6.00}{2} + 6.00 \right] + M_B = 0 \\ \Rightarrow M_B = 240.00 \text{ kNm} \cup \checkmark$$

Sistemde dış yüklerden meydana gelen mesnet tepkileri hesaplandıktan sonra, kritik kesitlerdeki eğilme momentleri hesaplanarak (M) diyagramı Şekil 11.4b de görüldüğü gibi çizilir.



**Şekil 11.4b:** Dış yüklerden oluşan (M) diyagramı

$\varphi_A$  dönmesinin hesabında, önce (A) mesnetine birim moment yüklemesi yapılır ve bu yüklemeden oluşan mesnet tepkileri hesaplanır, sonra kritik kesitlerdeki eğilme momentleri elde edilerek ( $\bar{M}_{\varphi_A}$ ) diyagramı çizilir, Şekil 11.4c.



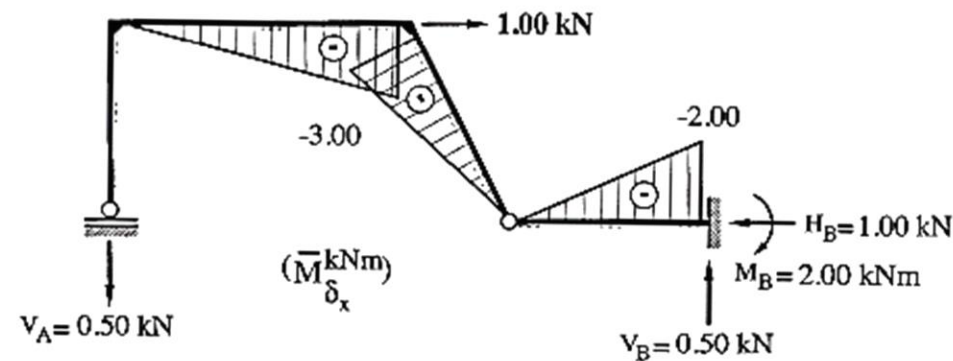
**Şekil 11.4c:**  $\varphi_A$  nın hesabı için yapılan birim yüklemeden oluşan ( $\bar{M}_{\varphi_A}$ ) diyagramı

$\varphi_A$  dönmesi, dış yüklerden oluşan (M) diyagramı ile birim yükleden elde edilen ( $\bar{M}_{\varphi_A}$ ) diyagramının çarpımı ile hesaplanır.

$$\varphi_A = \int (M)(\bar{M}_{\varphi_A}) \frac{ds}{EI} = \frac{1}{3} \times 6.00 \times (90) \times [1 + 0.25] \times \frac{1}{2EI} + \frac{1}{3} \times 4.00 \times (-0.50)(-240) \times \frac{1}{3EI}$$

$$\Rightarrow \varphi_A = \left( \frac{165.83}{EI} \right) \text{rad} \checkmark$$

$\delta_x$  yatay yerdeğiştirmesinin hesabında, yerdeğiştirmesi aranan noktaya yerdeğiştirme doğrultusunda 1 kN luk yatay kuvvet yüklenir ve bu yükleden oluşan mesnet tepkileri hesaplanır. Kritik kesitlerdeki eğilme momentleri elde edilerek ( $\bar{M}_{\delta_x}$ ) diyagramı Şekil 11.4d de görüldüğü gibi çizilir.

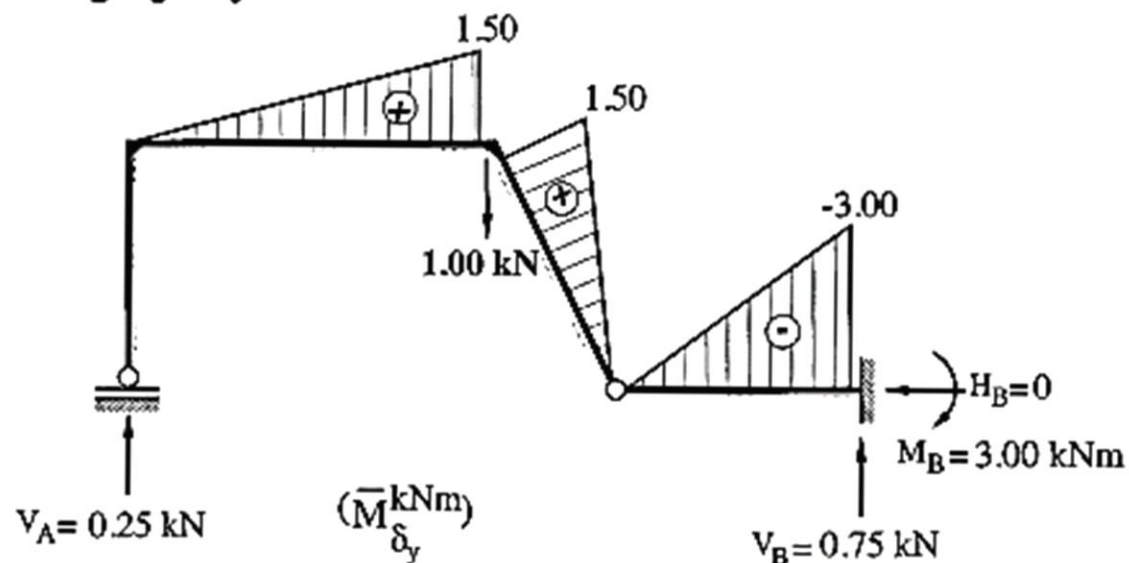


**Şekil 11.4d:**  $\delta_x$  in hesabı için yapılan birim yükleden oluşan ( $\bar{M}_{\delta_x}$ ) diyagramı

$\delta_x$  yatay yerdeğiştirmesi, dış yüklerden oluşan (M) diyagramı ile birim yüklemeye ait ( $\bar{M}_{\delta_x}$ ) diyagramının çarpımı ile hesaplanır.

$$\delta_x = \frac{1}{3} \times 6.00 \times (90) \times (-3) \times \frac{1}{2EI} + \frac{1}{3} \times 4.00 \times (-2)(-240) \times \frac{1}{3EI} \Rightarrow \delta_x = \left( -\frac{56.67}{EI} \right) \text{m} \checkmark$$

$\delta_y$  düşey yerdeğiştirmesinin hesabında, yerdeğiştirmesi aranan noktaya yerdeğiştirme doğrultusunda 1 kN luk düşey kuvvet etkilir. Bu yüklemekten oluşan mesnet tepkileri hesaplanarak, kritik kesitlerdeki eğilme momentleri elde edilir ve ( $M_{\delta_y}$ ) diyagramı Şekil 11.4e de görüldüğü gibi çizilir.

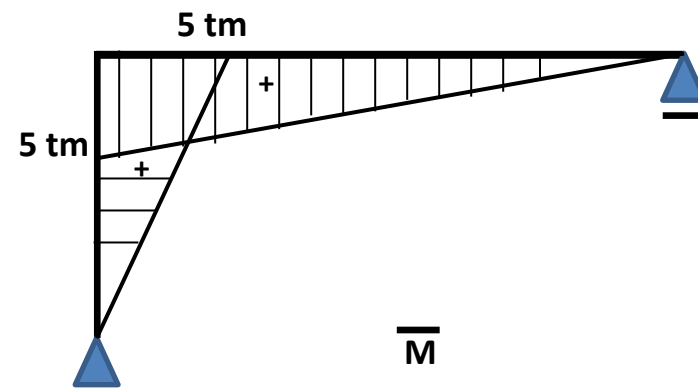
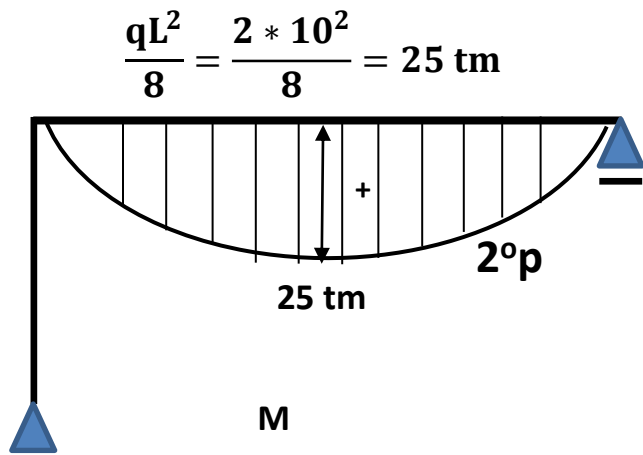
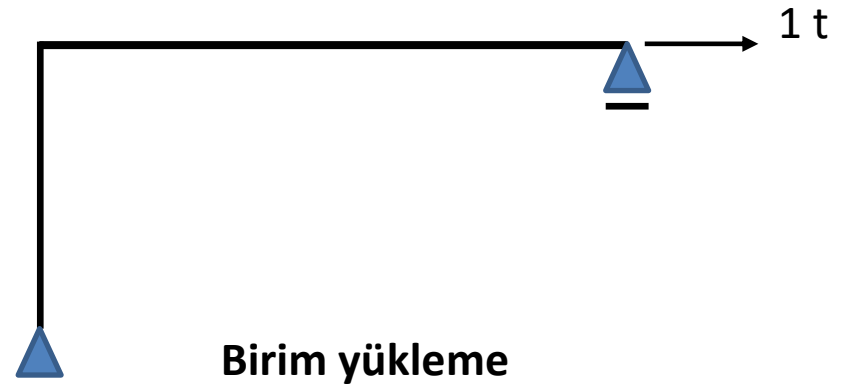
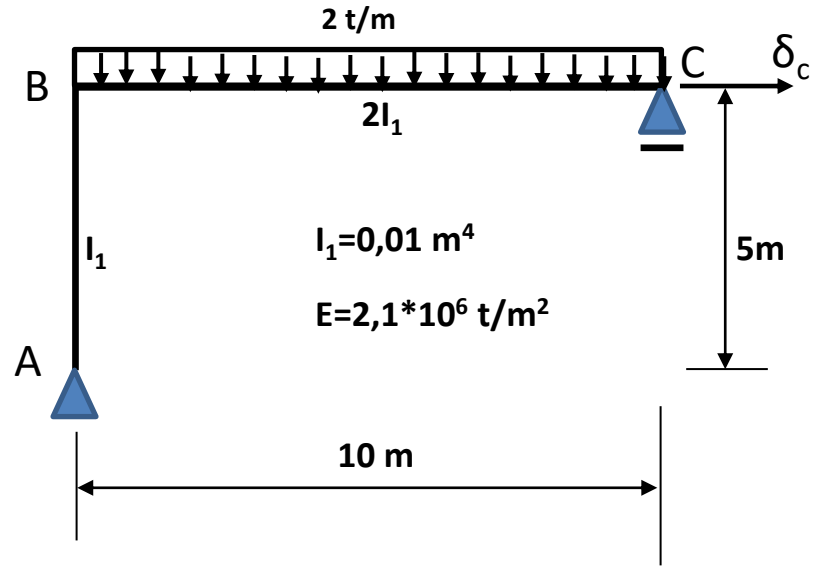


**Şekil 11.4e:**  $\delta_y$  in hesabı için yapılan birim yüklemekten oluşan diyagramı

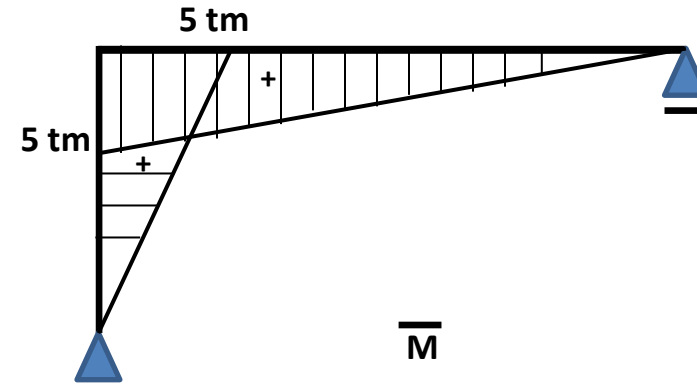
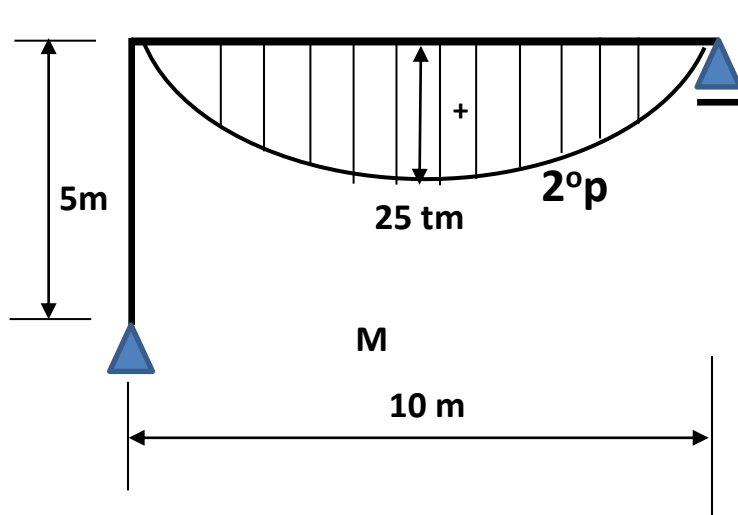
$\delta_y$  düşey yerdeğiştirmesi, dış yüklerden oluşan ( $M$ ) diyagramı ile birim düşey kuvvet yüklemekten elde edilen ( $\bar{M}_{\delta_y}$ ) diyagramının çarpımı ile hesaplanır.

$$\delta_y = \frac{1}{3} \times 6.00 \times (90) \times (1.5) \times \frac{1}{2EI} + \frac{1}{3} \times 4.00 \times (-3)(-240) \times \frac{1}{3EI} \Rightarrow \delta_y = \left( \frac{455.00}{EI} \right) \text{m} \checkmark$$

# UYGULAMA 1



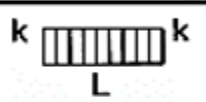



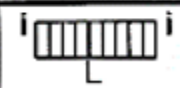



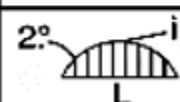
$$\frac{qL^2}{8} = \frac{2 * 10^2}{8} = 25 \text{ tm}$$



$$1 * \delta_c = \int_0^L \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{E(2I_1)} \frac{1}{3} L i k_m + 0 = \frac{1}{E2I_1} * \frac{1}{3} * 10 * 25 * 5 = 1250 \frac{1}{6EI_1} = 1250 \frac{1}{6 * 2,1 * 10^4} = 0,0104 \text{ m}$$

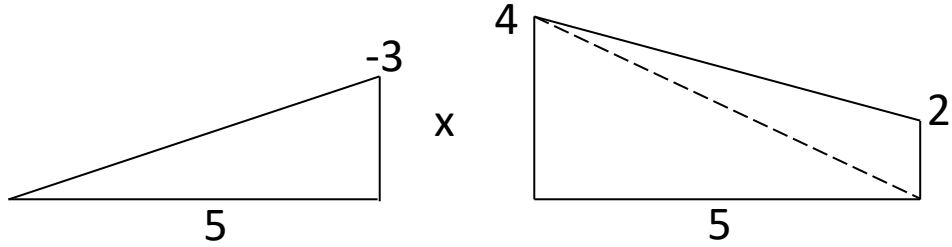
$$EI_1 = 2,1 * 10^4 \quad \delta_c = 0,0104 \text{ m}$$



ÇARPIM TABLOSU				
				
	$Lk$	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{2}L(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3}Lk_m$
	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{3}Lk$	$\frac{1}{6}L(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3}Lk_m$
	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{6}Lk$	$\frac{1}{6}L(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3}Lk_m$
	$\frac{1}{2}L(i_1 + i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1 + 2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1 + i_2)k_m$
	$\frac{2}{3}Lk_m$	$\frac{1}{3}Lk_m$	$\frac{1}{3}Lk_m(k_1 + k_2)$	$\frac{8}{15}Lk_m$

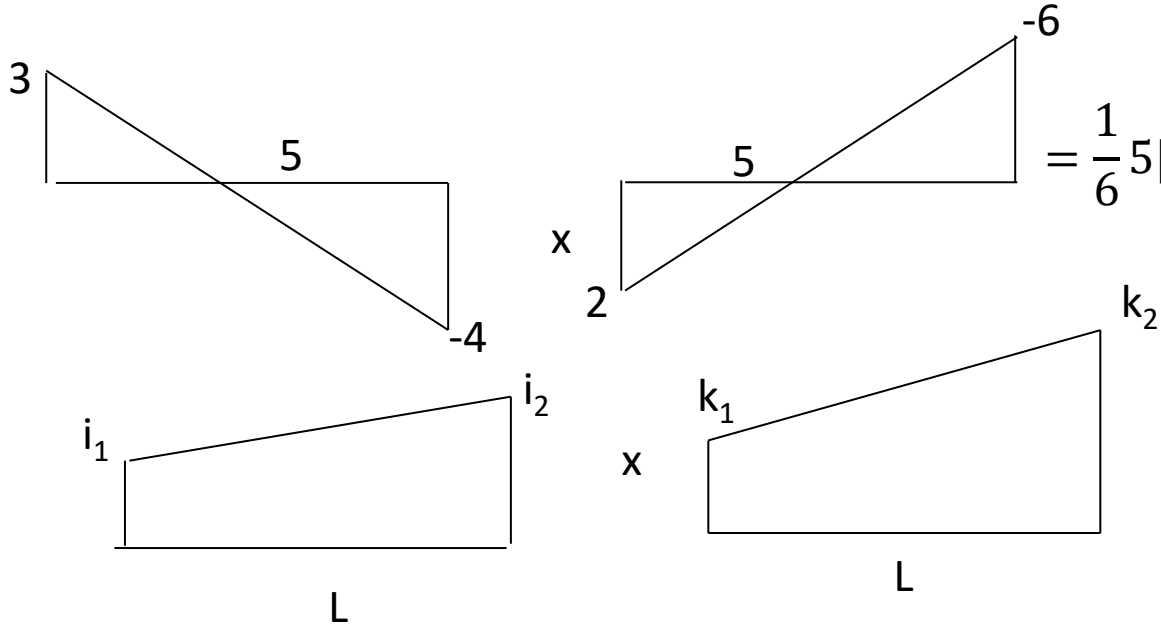
## ÇARPIM TABLOLARININ KULLANILMASI

1) Bütün çarpımlarda i ve k ordinatlarının cebrik değeri göz önüne alınır.



$$= \frac{1}{6} Li(k_1 + 2k_2) = \frac{1}{6} 5(-3)(4 + 2 * 2)$$

$$= \frac{1}{6} Li(-20) + \frac{1}{3} Li(-20) = \frac{1}{6} 5(-3) * 4 + \frac{1}{3} 5(-3) * 2 = -20$$

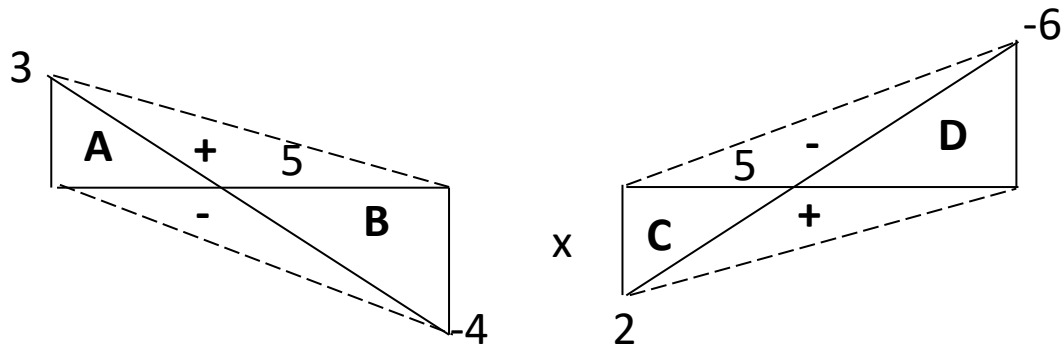


$$= \frac{1}{6} 5[(2 * 3 * 2 + 3 * (-6) + (-4) * 2 + 2(-4) * (-6)] = -\frac{1}{6} 310$$

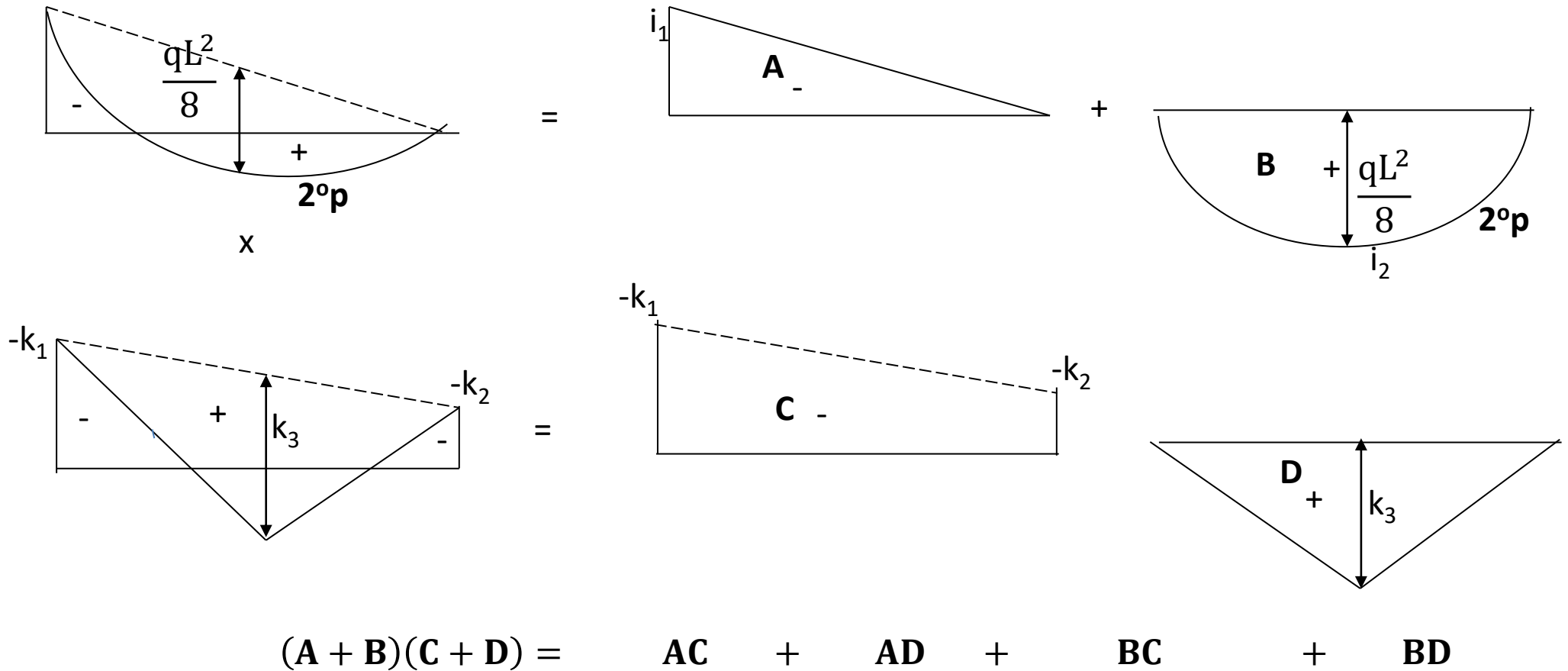
$$= \frac{1}{6} L(2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2)$$

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

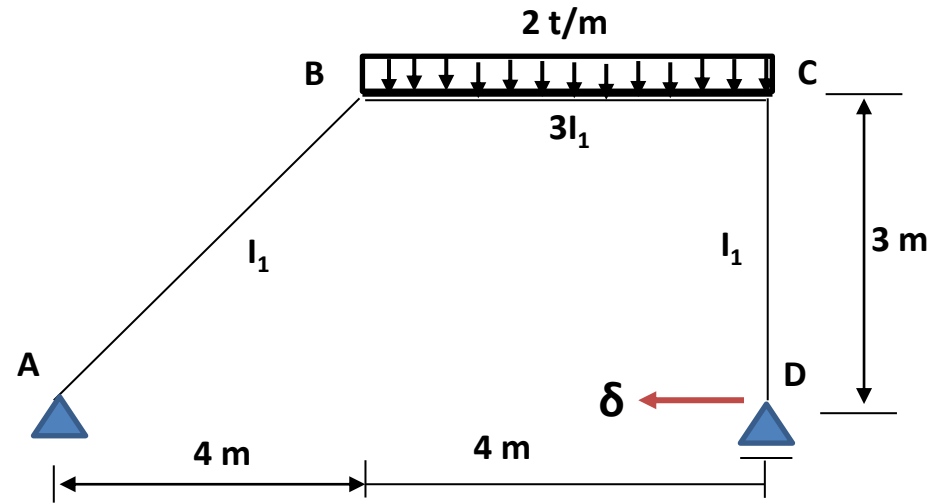
$$= \frac{1}{6} 5 * 3 * (-6) + \frac{1}{3} 5 * 3 * 2 + \frac{1}{3} 5 * (-4) * (-6) + \frac{1}{6} 5 * (-4) * 2 = \frac{310}{6}$$



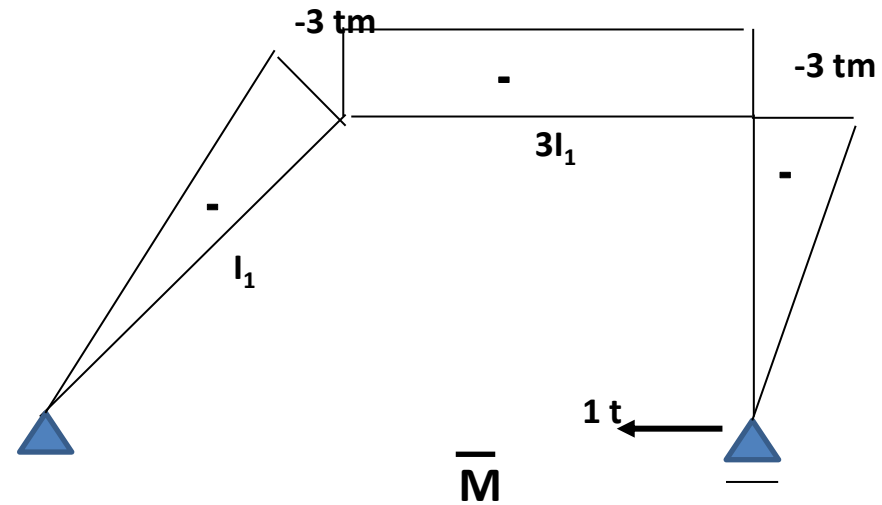
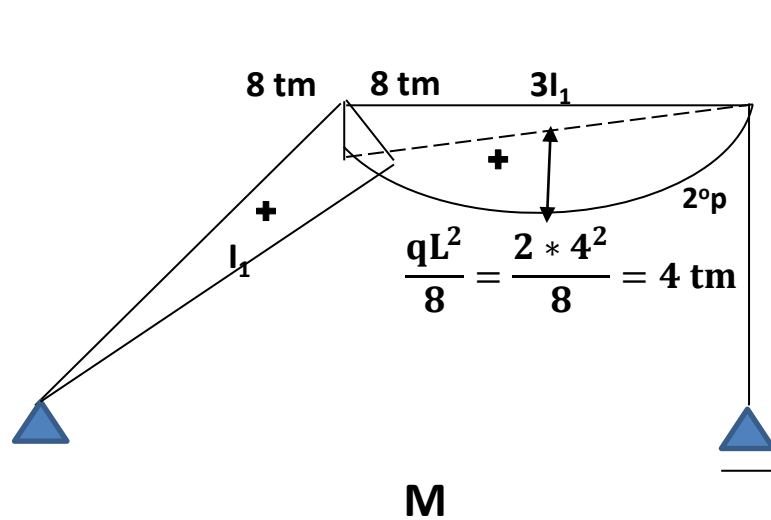
2) Tabloda olmayan  $M(s)$   $\bar{M}(s)$  fonksiyonlarının çarpımı süperpozisyon yolu ile yapılır.



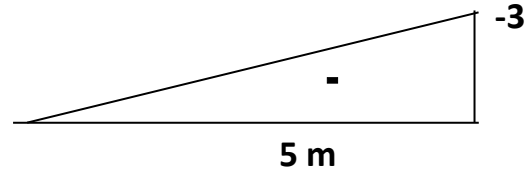
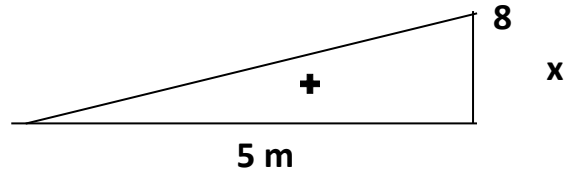
## UYGULAMA 2



$$1 * \delta_D = \int_0^L \bar{M} \frac{M}{EI} dx$$

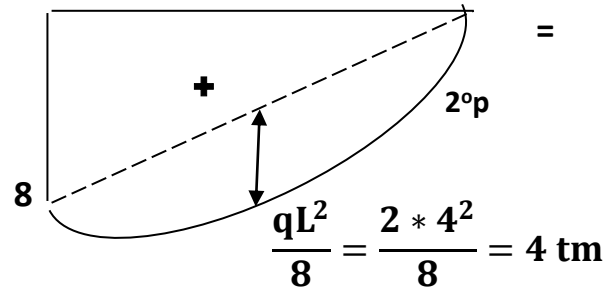
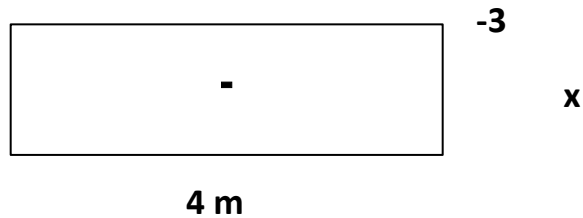


AB çubuğu üzerinde



$$= \frac{15 * 8 * (-3)}{3 EI_1} = -\frac{40}{EI_1}$$

BC çubuğu üzerinde



$$\frac{1}{2} * \frac{\text{Lik}}{EI} + \frac{2}{3} * \frac{\text{Lik}}{EI} = \frac{1}{2} * \frac{4 * 8 * (-3)}{E3I_1} + \frac{2}{3} * \frac{4 * 4 * (-3)}{E3I_1} = -26,7 \frac{1}{EI_1}$$

CD çubuğu üzerinde 0

$$\delta = -\frac{40}{EI_1} - \frac{26,7}{EI_1} = -\frac{66,7}{EI_1}$$